Антипин Н. А.

Решение проблемы собственных значений матриц с помощью характеристического полинома

Учебное пособие

Н. А. Антипин

Решение проблемы собственных значений матриц с помощью характеристического полинома

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2026

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.1я73
А72

Антипин, Н. А.

А72 Решение проблемы собственных значений матриц с помощью характеристического полинома: учебное пособие / Н. А. Антипин. – СПб.: Наукоемкие технологии, 2026. – 144 с.

ISBN 978-5-00271-114-7

Данное учебное пособие является продолжением работ автора по арифметическим вопросам алгебры матриц. В нем содержатся сведения для определения собственных значений матриц, а также дающие точные оценки для максимального и минимального модуля их значений. В пособии рассматриваются плохо обусловленные случаи, к которым приведены конкретные примеры, представлен материал, посвященный методу Лобачевского отыскания корня полинома не только в случае его вещественного значения, но и произвольного комплексного, рассматривается вопрос о сходимости этого метода к истинному значению, представлен широкий круг направлений, по которым можно развивать новые арифметические приложения. Приведен материал эмпирического характера по вычислению четвертого стохастического момента детерминанта матрицы с вещественными элементами.

Предназначено для исследователей в области алгебры матриц и ее приложений, но будет также интересно всем любителям математики.

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-00271-114-7 © Антипин Н. А., 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

1. Алгоритм параллельного вычисления детерминанта матрицы и значения полинома в точке 7

2. Условия сходимости метода Крылова к характеристическому полиному матрицы 10

3. К методу Лобачевского нахождения приближений корней в случае равномодульных 21

4. Поиск корней полиномов. Метод Троицы Лагерра – Ньютона – Чебышева нахождения корня полинома с произвольными коэффициентами..... 36

Дополнение. Некоторые интересные вопросы, на которые пока не нашлось достойных ответов..... 75

Дополнение 1. Аспекты класса floatEXT..... 78

Дополнение 2. Преобразование многоразрядных чисел из одной системы счисления в другую 79

Дополнение 3. Четвертый стохастический момент модуля детерминанта матрицы из вещественных чисел..... 80

3.1. Элементы матрицы в среднем равны 0 80

3.2. Произвольные вещественные элементы матрицы..... 94

Дополнение 4. Распределения квадратов модулей определителей матриц из целых комплексных чисел, полученных с помощью вероятностных методов, элементы которых расположены в прямоугольнике {0; i; …Mi–2i; Mi–i} × {0; 1; …2m–3; 2m–2} 113

Список литературы 140

«*Нужно заниматься не тем, что интересно*
или любопытно, а тем, что важно и необходимо»

П. Л. Чебышев

«Мы должны знать, мы будем знать.»

Д. Гильберт

«...А сколь многие споткнулись на этом пути
и сели на мель как раз в то время, когда воображали,
что плывут при попутном ветре!»

Г. В. Лейбниц

Предисловие

Как определить необходимую точность для существования законов естествознания? Как отделить недостаточно точно сформулированный закон от несуществующего закона?

Следствием худшей обусловленности системы при повышении количества содержащегося в ней фактического материала является то, что росту вычислительных мощностей на определенной стадии исследования какого-либо процесса обязательно должно предшествовать повышение точности данных, на которых базируются процесс и глубина понимания возникновения явления этого процесса и возможные его последствия. Это особенно важно, когда в мире наблюдается духовная, нравственная, культурная, интеллектуальная деградация. Правильное распределение ресурсов всегда должно способствовать обогащению, а не обеднению мирового сообщества. Прогресс науки и техники не отделим от роста количества вычислений, как он не отделим от целей, которым служит. История знает случаи, когда некоторые народы способствовали всеобщему мировому упадку, но она не пощадила их, в ней они остались ренегатами и тиранами, променявшими чужие жизни на свою сиюминутную выгоду. Их невозможно и нельзя в чем-то убедить, пока они сами не докажут обратного: они променяли, лишились своего разума и променяют его в следующий раз, пока не начнут его ценить.

Интерес к алгоритму вычисления собственных значений посредством характеристических полиномов матрицы связан с большими возможностями по его параллелизации, нежели стандартный алгоритм QR-факторизации. Имея в наличии n процессов, способных работать в параллельном режиме, с помощью характеристического полинома матрицы есть реальная возможность вычислять все ее собственные значения за время, пропорциональное $O(n^2)$, а не $O(n^3)$, характерного для алгоритма QR-факторизации. В данной работе представлены алгоритмы для работы со следующими полиномами:

1) авторский алгоритм наискорейшего вычисления корня полинома при условии вещественности всех его корней;

2) алгоритм отделения кратных корней полинома (автором получено доказательство применимости алгоритма) и определения количества вещественных корней полинома;

3) авторский алгоритм определения кольца локализации корней полинома;

4) авторский алгоритм по вычислению произвольного, не обязательно вещественного корня полинома;

5) авторская интерпретация метода Лобачевского поиска корня полинома, полезная прежде всего тем, что в ней подробно изучаются условия его сходимости к корню;

6) авторская интерпретация метода Крылова поиска характеристического полинома, полезная прежде всего тем, что в ней подробно изучаются условия его сходимости к характеристическому полиному;

7) авторский алгоритм параллельного вычисления детерминанта матрицы и значения полинома в точке.

В дополнении представлен материал для дальнейшего развития алгебры матриц. В нем собраны вопросы, на которые еще нет ответов, но каждого, кто достойно ответит хотя бы на один из них, можно записать в ряды великих деятелей прогресса арифметики.

В данном пособии нет такого количества новых глубоких обобщений вычислительных явлений, которые можно было бы связать с началом XXI века, как в монографии [3], но в нем содержится много новых вычислений, результаты которых превышают 10^{20} арифметических операций. 2026 год стал подобен 2019 году, когда миру открылось распределение матриц 8-го порядка из 0 и 1. Теперь мы знаем все стохастические моменты 4-го порядка детерминантов матриц, не превышающих 8-го порядка, из вещественных чисел.

1. Алгоритм параллельного вычисления детерминанта матрицы и значения полинома в точке

В современном мире манипулирования все большими объемами энергии все ценнее становится скорость получения информации, и все более дешевыми получаются способы ее получения [14, 18]. Параллельные вычисления оказываются не отделимыми от, казалось бы, последовательных алгоритмов. Разработчики Windows понимают это и стремятся сделать ОС таким образом, чтобы она негативно не влияла на скорость вычислений, а наоборот делала процесс распараллеливания как можно проще и понятней [16]. Повсеместное использование времени порядка ~16 мс на единичное обращение потока к процессору слишком велико. Для компенсации чего во втором издании [19] советуют использовать пул потоков.

Для вычисления детерминанта матриц существует ряд параллельных алгоритмов. В [13] рассмотрен случай, когда имеется порядка $N=n^2$ процессоров, для n порядка 10^4–10^6 — такого количества процессоров не имеет ни один вычислительный центр, так что полезно рассмотреть случай распараллеливания, когда $N<n$. В этом случае каждый процессор будет обрабатывать около $[n'/N]$ строк ($[4n'/N]$ — когда дополнительно с детерминантом матрицы ищется ее обратная), на каждой $[n'/N]$ итерации алгоритма, выдавая в конце номер строки с максимальным элементом из своих строк, n' — текущий для данной итерации порядок подматрицы. После чего каждый из процессоров получает новые $[n''/N]$ строк ($[4n''/N]$ — для поиска обратной матрицы) на следующие $[n''/N]$ итераций и т. д.

При наличии n-параллельно соединенных процессоров [13] процесс распараллеливания алгоритма умножения матрицы на вектор становится тривиальным и занимает время ни $O(n^3 \ln n)$, как в последовательном случае, а $O(n^2 \ln n)$. Умножение матрицы на n различных векторов в параллельном режиме будет занимать порядка $O(n^2 \ln n)$. Если параллельных процессоров недостаточно, то можно поступить, как и в предыдущем абзаце.

Таким образом, при наличии n-параллельно соединенных процессоров время вычисления детерминанта матрицы будет занимать

порядка $O(n^2)$ операций, а умножения матрицы на n векторов будет занимать порядка $O(n^2 \ln n)$ операций. Тех же операций, а значит, и того же времени вычисления, требует и метод Крылова поиска характеристического многочлена матрицы.

Для алгоритма Троицы Лагерра – Ньютона – Чебышева основное время вычислений затрачивается на вычисление значения полинома в некоторой точке. К сожалению, параллелизация этого алгоритма при числе процессоров, равному порядку полинома, дает время вычисления значения полинома в точке порядка $O(\log^3_2 n)$ против $O(n)$ для последовательной реализации, вычислением степеней двоек аргумента полинома и передачи их каждому из процессоров; ощутимый выигрыш (порядка 5 раз) начинается только для $n \sim 10^6$, при $n < 10^3$ такое распараллеливание оказывается даже вредным. Однако если не все корни полинома вещественны, то n параллельно соединенных процессоров могут сильно помочь, если каждый из них будет вычислять корень по алгоритму Троицы Лагерра – Ньютона – Чебышева, но с различными начальными приближениями, равномерно распределенными по верхней окружности локализации корней. Безусловно, это не самое лучшее решение в плане энергоэффективности, но оно оправдывается своим быстродействием. Алгоритм поиска корня будет занимать около $n \ln \mathrm{TOL}$ операций для вещественных корней, что гарантирует, при наличии n-параллельно соединенных процессоров (для поиска характеристического полинома), время решения многих проблем собственных значений, в том числе и полной за $O(n^2 \ln n)$ операций. Если не все корни вещественные, то алгоритм поиска корня может несколько затянуться, и поиск одного корня будет занимать около $n \ln \mathrm{TOL}$ операций $+ \mathrm{p}^2$ операций на метод Лобачевского, если по каким-либо причинам $n \ln \mathrm{TOL}$ операций оказалось недостаточно. Таким образом, если не требуется найти полную проблему собственных значений, то и здесь требуется $O(n^2 \ln n)$ операций.

Для решения полной проблемы собственных значений в [4] предложена QR-факторизация. Но можно ли распараллелить процесс приведения матрицы к форме Хессенберга [21, 22, 27], занимающий $O(n^3)$ операций, при последовательном их выполнении? Да можно, это будет время $O(n^2 \ln n)$. Но для достижения требуемой точности

QR-факторизация будет требовать ничем не лимитированного количества итераций. В случае только вещественных итераций это вполне допустимо из-за их дешевизны, но при наличии комплексных корней можно говорить о том, что алгоритм может и не сойтись. Относительная точность порядка 10^{-15} может потребоваться даже в практических задачах, входные дынные которых заданы с относительной точностью не более 10^{-3}, например в колебательной физики, химии и др., так как отношения этих величин часто оказываются менее 10^{-10}.

В задачах теоретической физики диапозон требуемых точностей еще шире. В математических проблемах он ничем не ограничен [26, 3]. Корень полинома может быть вычислен с любой требуемой точностью TOL, за время порядка $\ln \mathrm{TOL}$, с помощью метода Ньютона при условии относительной близости к корню не менее 10^{-1}; метод Лобачевского достигает этой близости. Так что решение многих проблем собственных значений в случае плохой обусловленности системы или требуемой точности результата требует применения полиномиальных методов. Решение полной проблемы собственных значений во многих математических пакетах находится с помощью QR-факторизации. Но если необходимо определить только часть проблем, таких как поиск наибольшего или наименьшего по модулю собственного значения с высокой точностью, то характеристические полиномы тоже будут востребованы.

2. Условия сходимости метода Крылова к характеристическому полиному матрицы

Для поиска собственных значений матрицы существует ряд методов [4, 7, 27]. Одни из них основаны на поиске корней характеристического полинома матрицы. Для того чтобы его получить, используют метод Крылова, если матрица не вырождена и метод Фаддеева — в остальных случаях. В [21, 22] он весьма сильно критикуется и предлагается использовать метод QR-факторизации [4, 27]. Но есть ли обоснование его сходимости для всех типов матриц (смотри приложение)? А главное, какова скорость сходимости? Сколько итераций QR-факторизации нужно, чтобы получить заданную точность корней? На эти вопросы авторы [21, 22] если и пытались ответить, то весьма неубедительно. Но факт заключается в том, что многие математические пакеты программного обеспечения все же отдают предпочтение QR-факторизации, чем решению характеристического уравнения, не задумываясь о проблемах, поставленных выше.

Число λ называется собственным значением квадратной матрицы $A_{n\times n}$, если для какого-либо ненулевого вектора $\vec{v}$ выполняется:

$$A_{n\times n}\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}, \tag{2.1}$$

$\vec{v}$ в этом случае называется собственным вектором матрицы $A_{n\times n}$.

Отсюда следует, что

$$A_{n\times n}-\lambda\cdot E_{n\times n}=0. \tag{2.1.1}$$

Домножив это уравнение на матрицу $A_{n\times n}$, придем к уравнению:

$$A^2_{n\times n}-\lambda^2\cdot E_{n\times n}=0, \tag{2.1.2}$$

откуда делаем вывод, что каждое характеристическое число матрицы $A^2_{n\times n}$ равно квадрату одного из характеристических чисел матрицы $A_{n\times n}$.

Далее, домножая вековое уравнение на обратную матрицу, найдем:

$$A^{-1}_{n\times n}-\lambda^{-1}\cdot E_{n\times n}=0 \tag{2.1.3}$$

откуда делаем вывод, что каждое характеристическое число матрицы $A^{-1}_{n\times n}$ равно обратному одного из характеристических чисел матрицы $A_{n\times n}$.

Если рассмотреть определитель матрицы ($A_{n\times n} - \lambda \cdot E_{n\times n}$), то придем к уравнению:

$$\left|A_{n\times n} - \lambda \cdot E_{n\times n}\right| = 0, \tag{2.2}$$

которое носит название векового уравнения [10]. Решая его, придем к уравнению относительно полинома степени не выше n, которое носит название характеристического уравнения матрицы $A_{n\times n}$. Его корнями являются собственные значения матрицы $A_{n\times n}$. Если матрица состоит из вещественных чисел, то коэффициенты ее характеристического уравнения тоже будут вещественны:

$$P_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot \lambda^j = 0, \;\; b_j \in Re, \; \lambda \in C, \tag{2.3}$$

величину b_n полагаем равной единице.

Следом матрицы $A_{n\times n}$ называется величина:

$$s_1 = SpA_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{j\,j}, \tag{2.4}$$

он равен сумме ее собственных значений (смотри [7] или раскрой определитель (2.2) и подсчитай коэффициенты перед λ^{n-1}) и коэффициенту b_{n-1}, взятому с обратным знаком.

Для определения следующего коэффициента $P_n(\lambda)$ введем величину:

$$s_k = SpA_{n\times n}^k,$$

из формулы (2.1.2) делаем вывод, что сумма квадратов собственных значений $A_{n\times n}$ равна s_2. Из уравнения Ньютона для сумм степеней корней полинома:

$$s_m + b_{n-1}s_{m-1} + b_{n-2}s_{m-2} + ... + mb_{n-m} = 0 \tag{2.5}$$

находим b_{n-2}:

$$b_{n-2} = -0{,}5\left(s_2 + s_1 b_{n-1}\right),$$

аналогично b_{n-3}:

$$b_{n-3} = -\left(s_3 + s_2 b_{n-1} + s_1 b_{n-2}\right)/3$$

и т. д. Уравнение Ньютона (2.5) можно получить, последовательно умножая друг на друга сопровождающие матрицы полинома (2.3):

$$A_{n\times n\ companion} = \begin{Vmatrix} \frac{b_{n-1}}{-b_n} & \frac{b_{n-2}}{-b_n} & \frac{b_{n-3}}{-b_n} & \dots & \frac{b_1}{-b_n} & \frac{b_0}{-b_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad (2.6)$$

собственные значения, которой совпадают с корнями полинома (2.3). А также воспользоваться тем, что собственные значения матрицы, возведенной в некоторую степень, возводятся в ту же степень.

Фаддеев несколько усовершенствовал этот метод, благодаря чему стало легче находить собственные вектора матрицы $A_{n\times n}$ [7]. Но данный метод, являясь арифметически очень стабильным, несколько времязатратный — его сложность оценивается величиной $O(n^4)$. Метод Крылова в случае невырожденной матрицы позволяет получить ее характеристическое уравнение за порядка $O(n^3)$ операций.

В [7] не дается четких указаний о применимости метода Крылова, и алгоритм, рассмотренный там, нуждается в ряде уточнений. Во-первых, если точно не известно, что матрица невырождена, то обязательно следует проверить, что это не так, вычислив детерминант матрицы. Авторы [7] советуют пренебречь этим шагом, так как в дальнейшем при поиске детерминанта матрицы Крылова, если исходная матрица была вырождена, то матрица Крылова тоже оказывается вырожденной. Это действительно так, но матрица Крылова получается из исходной путем длинной цепочки операций, в которых легко накапливаются арифметические округления, и матрица Крылова оказывается невырожденной. В качестве примера попробуйте найти определитель матрицы Крылова, полученной из матрицы Россера [10]. Если вычисления проводить со встроенными типами данных, то матрица Крылова оказывается невырожденной!

Другой, не менее важный момент, на котором не остановились авторы [7], — это вектор, порождающий матрицу Крылова. Если он есть линейная комбинация ограниченного числа собственных векторов исходной матрицы, то матрица Крылова будет иметь характеристический многочлен, корнями которого являются только собственные значения этих собственных векторов. Так как же выбрать собственный вектор,

линейной комбинацией которого будут все собственные вектора исходной матрицы? Ответ заключается в том, что все его компоненты должны быть случайными числами из того же поля, что и элементы исходной матрицы, — это исключит ситуацию, когда какой-то собственный вектор не участвует в линейной комбинации, суммой которой является случайный вектор. В сказанном легче убедиться, если вспомнить, что собственные вектора матрицы составляют базис n-мерного пространства, и ситуация, когда какой-то собственный вектор не участвует в разложении полностью случайного вектора, равносильна тому, что одна из его компонент равнялась бы определенному значению, а именно 0 в ортонормированном единичном базисе $e_1 = \{1, 0, ..., 0, 0\}^T$, $e_2 = \{0, 1, ..., 0, 0\}^T$, ..., $e_{n-1} = \{0, 0, ..., 1, 0\}^T$, $e_n = \{0, 0, ..., 0, 1\}^T$, что невозможно. Если генератор случайных чисел недостаточно мощный и матрица Крылова оказалась вырожденной, то следует выбрать другой случайный вектор. Случайный вектор лучше сгенерировать заранее, если порядок матрицы достаточно высок.

В случае если ранг матрицы Крылова не равен порядку исходной матрицы, то может оказаться, что несколько ее столбцов ортогональны всем остальным столбцам. Напомним, что два вектора $\mathbf{m}_i$ и $\mathbf{m}_j$ ортогональны друг к другу, если выполняется равенство:

$$(\overrightarrow{m_i}, \overrightarrow{m_j}) = 0,$$

т. е. их скалярное произведение равно 0. Беря последовательно j-й вектор матрицы $A_{n\times n}$, следует проверять условие ортогональности этого вектора и остальных векторов матрицы $A_{n\times n}$, не равных ему. Если на каком-то этапе условие ортогональности не выполнилось, то переходим к рассмотрению ортогональности следующего $(j+1)$-вектора. Если условие ортогональности выполнилось для всех $(n-1)$-го вектора, то его собственное значение находим из уравнения:

$$A_{n\times n} \cdot \overrightarrow{a_j} = \lambda_j \cdot \overrightarrow{a_j}.$$

Если ранг матрицы Крылова отличается от порядка матрицы на величину, равную количеству ее ортогональных столбцов, то метод Крылова сошелся. В качестве коэффициентов характеристического полинома следует принять последнюю строку преобразованной единичной матрицы.

Следующий вопрос, на котором не остановились авторы [7] и который был в годы написания этой книги совершенно неактуальным, это ситуация с достаточно большим порядком матрицы, когда при построении матрицы Крылова возникает реальная угроза переполнения арифметической разрядности, как в сторону бесконечности, так и в сторону 0. Данная проблема решается масштабированием исходной матрицы — поиск максимального по модулю элемента матрицы и деление всех элементов матрицы на него. Все собственные значения матрицы также разделятся на этот максимальный по модулю элемент. Для встроенных типов данных масштабирование решает проблему переполнения в методе Крылова для всех матриц порядка меньше 10^3. Если порядок матриц много больше 10^3, то кроме масштабирования понадобится увеличить количество битов, отводимых на экспоненту каждого элемента матрицы, для этого существует класс floatEXT. Он сильно не замедляет метод Крылова по сравнению с использованием встроенными типами данных, и проблема переполнения в нем не должна возникать для матриц, порядок которых сильно не превышает 10^{16}. Применение класса floatEXT сводит на нет проблему переполнения в методах Крылова или Лобачевского.

В качестве примера поиска характеристического полинома с помощью метода Крылова рассмотрим матрицу:

$$\det A_{5\times5} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Модуль детерминанта матрицы A равен 10, следовательно, она невырождена и можно применять метод Крылова.

Промасштабируем матрицу A, разделив все ее элементы на одно и то же число, равное 10^p, которое удовлетворяет условию: $1 \le 10^p max_{ij} |a_{ij}| \le 10$, где $max_{ij} |a_{ij}|$ — максимальный по модулю элемент матрицы *A*. Все собственные значения разделятся на то же число 10^p.

$$\det \tilde{A}_{5\times5} = \begin{Vmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & -0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В качестве порождающего вектора выберем случайный вектор $\boldsymbol{r}$ порядка 5:

$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} -245503960496356 \\ 1235659870018116 \\ 616002566721201 \\ -17834049949444 \\ -21399441158209 \end{Vmatrix}.$$

Матрица Крылова задается в виде:

$$M_{6\times6} = \begin{Vmatrix} \vec{r}^{\,T} & 0 \\ (\tilde{A}_{5\times5}\,\vec{r}^{\,T}) & 0 \\ (\tilde{A}^{2}_{5\times5}\,\vec{r}^{\,T}) & 0 \\ (\tilde{A}^{3}_{5\times5}\,\vec{r}^{\,T}) & 0 \\ (\tilde{A}^{4}_{5\times5}\,\vec{r}^{\,T}) & 0 \\ (\tilde{A}^{5}_{5\times5}\,\vec{r}^{\,T}) & 0 \end{Vmatrix}.$$

Матрица Крылова:

$$M_{6\times6} = \begin{Vmatrix} -245503960496356 & 1235659870018116 & 616002566721201 & -17834049949444 & -21399441158209 & 0 \\ 35631929285111{,}5 & 158841377166046{,}6 & 458266545064563{,}5 & -211508979255206{,}6 & 7514723245587{,}1 & 0 \\ -47530221786861{,}2 & -9743713820177{,}17 & 186835943949587{,}88 & -25431696173841{,}85 & -86268824709391{,}37 & 0 \\ -26954157573046{,}81 & -34012241808619{,}479 & 61398232216911{,}235 & 19419858216478{,}869 & -36793518986501{,}3 & 0 \\ -10294477338209{,}8655 & -19317039239369{,}8303 & 12370451239006{,}2688 & 17810179368056{,}2421 & -9105921452218{,}7727 & 0 \\ -2417178844852{,}97225 & -7040492850817{,}45676 & -903842679156{,}72308 & 8543633256786{,}73208 & 115409294937{,}28962 & 0 \end{Vmatrix}$$

Коэффициенты характеристического полинома будем находить в виде элементов последней строки единичной матрицы, к которой были применены те же операции, что и в методе исключения неизвестных матрицы Крылова поиска детерминанта.

Начальный характеристический полином:

$$E_{6\times 6} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

1-я итерация:

Первая строка M домножается на число, обратное первому ненулевому элементу:

– 0,000000000000004073254044367414340501748678945602477097626
192578444166670605912866109090514994366153358407716045126847
219511321208473536028693425356323564653851859426922101225131
576388008532613297303987252194962979210261844619986055833079
846332889374955875910940097489056;

преобразованная матрица:

Затем первую строку *M*, домноженную на число, обратное первому элементу другой, нижней строки, вычитаем из этой строки:

[[1 –5,033156563013804506 –2,509134946237839970 0,072642616084023254 0,087165360244877314 0]
[0 338182455900249,325610780990501070 547671864035712,259169575861037540
–214097375814598,019865502843242277 4408853293230,362304739506409463 –0]
[–0 –248970761548219,337205102025865262 67576203461739,292876766993937447
–21978976520190,414093240560959324 –82125835804820,697158105137278891 –0]
[–0 –169676736897908,271500817453695754 –6233386496021,839709168777515710
21377878736925,976403768562556526 –34444050131549,486785504761049899 –0]
[–0 –71130755416977,695691881113807473 –13459781603549,603995328855026482
18557997133121,498973709924674839 –8208599626500,984052272886315730 –0]
[–0 –19206532417767,320771191498679459 –6968870590084,129729804418978015
8719223451619,809352269493055730 326103559725,195357694782586647 –0]]

характеристический полином:

$$\begin{bmatrix} [1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0] \\ [0{,}145137900069194128 & 1 & -0 & -0 & -0 & -0] \\ [-0{,}193602668123012574 & -0 & 1 & -0 & -0 & -0] \\ [-0{,}109791131346929488 & -0 & -0 & 1 & -0 & -0] \\ [-0{,}041932021452512028 & -0 & -0 & -0 & 1 & -0] \\ [-0{,}009845783505756723 & -0 & -0 & -0 & -0 & 1] \end{bmatrix}$$

2-я итерация:

Вторая строка M домножается на число, обратное первому ненулевому элементу:

0,000000000000002956983671249229780757814794034134237107747324703406573739789343297238355381637833089112972626785592537398151049420285260369913424858022532658469604124398033212706145535365517053415708448005137711105635889687103365269397303915726715096076583307956929766300

преобразованная матрица:

Затем вторую строку M, домноженную на число, обратное второму элементу другой нижней строки, вычитаем из этой строки:

[[1,000000000000000000 −5,033156563013804506 −2,509134946237839970 0,072642616084023254 0,087165360244877314 0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 1,000000000000000000 1,619456759156229449 −0,633082444341076110 0,013036907197015573 −0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 0,000000000000000000 470773586083276,968025964603249961 −179597994810596,314843078872868803 −78880027091746,268218380461786218 0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 0,000000000000000000 268550751944868,906787616316535021 −86041484606219,452019424438864556 −32231990259119,028489184782625940 0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 0,000000000000000000 101733401040363,507429194391498518 −26473635374085,981082054409845789 −7281274569276,233025121409543355 0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 0,000000000000000000 24135278153822,395574996690733308 −3440095038736,444472492074490737 576497340432,099069613078324289 0,000000000000000000]]

характеристический полином:

[[1,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000]
[0,145137900069194128 1,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000]
[−0,086751786655657373 0,736202476516570187 1,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000]
[−0,036970898202666610 0,501731340397966448 0,000000000000000000 1,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000]
[−0,011404806656364508 0,210332482291625744 0,000000000000000000 0,000000000000000000 1,000000000000000000 0,000000000000000000]
[−0,001602908294193758 0,056793402740656957 0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000 1,000000000000000000]]

3-я итерация:

0,000000000000002124163354872476036101054977866737009192462176334505916879080377533972808607528741786589592485807094132690655757505467648962386977562910830763709927537569029445410613189699453762613076207919703279192130789357511396077655584993882596817220084470303426766877

преобразованная матрица:

[[1,000000000000000000 −5,033156563013804506 −2,509134946237839970
0,072642616084023254 0,087165360244877314 0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 1,000000000000000000 1,619456759156229449
−0,633082444341076110 0,013036907197015573 −0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 0,000000000000000000 1,000000000000000000
−0,381495479185245809 −0,167554062979635552 0,000000000000000000]
[−0,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000
16409413192546,394598525396668732 12764779345480,021070523243368440 −0,000000000000000000]
[−0,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000
1233719720495 2,279745759919962790 9764570115773,355104562606404282 −0,000000000000000000]
[−0,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000
5767404465825,225146976586803049 4620461256248,678816019274281316 −0,000000000000000000]]

характеристический полином:

[[1,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000
0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000]
[0,145137900069194128 1,000000000000000000 −0,000000000000000000
−0,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000]
[−0,086751786655657373 0,736202476516570187 1,000000000000000000
0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000]
[0,012516282530571233 0,081767828219892955 −0,570445666204738855
1,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000]
[0,007342112380097449 0,051240332679985638 −0,216098362456485591
−0,000000000000000000 1,000000000000000000 −0,000000000000000000]
[0,002844619271435150 0,019050309089015271 −0,051267273414003759
−0,000000000000000000 −0,000000000000000000 1,000000000000000000]]

4-я итерация:

0,000000000000060940631347757604091712347992064994940174062330665045692167231704268097605088532864613765552330323574834656166262777874086346127661293009064724504977359759104994327875755724399788260811394242688996978994911232370168605169940334993720076238820471053613694283

преобразованная матрица:

[[1,000000000000000000 −5,033156563013804506 −2,509134946237839970
0,072642616084023254 0,087165360244877314 0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 1,000000000000000000 1,619456759156229449
−0,633082444341076110 0,013036907197015573 −0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 0,000000000000000000 1,000000000000000000
−0,381495479185245809 −0,167554062979635552 0,000000000000000000]
[−0,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000
1,000000000000000000 0,777893712328368563 −0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000
−0,000000000000000000 167541982285,853701844451445595 0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000
−0,000000000000000000 134033585828,682961475561156476 0,000000000000000000]]

характеристический полином:

[[1,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000
0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000]
[0,145137900069194128 1,000000000000000000 −0,000000000000000000
−0,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000]
[−0,086751786655657373 0,736202476516570187 1,000000000000000000
0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000]
[0,012516282530571233 0,081767828219892955 −0,570445666204738855
1,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000]
[−0,002068086756255359 −0,010235712193313042 0,212783560138708852
−0,751836586731582393 1,000000000000000000 0,000000000000000000]
[−0,001554469405004287 −0,009688569754650433 0,149226848110967081
−0,351469269385265915 0,000000000000000000 1,000000000000000000]]

5-я итерация:

0,000000000005968653267417108438426131082936110968762248396743406295921517042816001676814203720956032614469689869445549330695544368847306933352740545189248198632216780849010690602511853222039573568219089198101436598741152876868974474993485175646807351529246247892314555696

преобразованная матрица:

[[1,000000000000000000 −5,033156563013804506 −2,509134946237839970
0,072642616084023254 0,087165360244877314 0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 1,000000000000000000 1,619456759156229449
−0,633082444341076110 0,013036907197015573 −0,000000000000000000]
[0,000000000000000000 0,000000000000000000 1,000000000000000000
−0,381495479185245809 −0,167554062979635552 0,000000000000000000]
[−0,000000000000000000 −0,000000000000000000 −0,000000000000000000
1,000000000000000000 0,777893712328368563 −0,000000000000000000]

[0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000
–0,000000000000000000 1,000000000000000000 0,000000000000000000]
[–0,000000000000000000 –0,000000000000000000 –0,000000000000000000
0,000000000000000000 –0,000000000000000000 –0,000000000000000000]]

характеристический полином:

[[1,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000
0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000]
[0,145137900069194128 1,000000000000000000 –0,000000000000000000
–0,000000000000000000 –0,000000000000000000 –0,000000000000000000]
[–0,086751786655657373 0,736202476516570187 1,000000000000000000
0,000000000000000000 0,000000000000000000 0,000000000000000000]
[0,012516282530571233 0,081767828219892955 –0,570445666204738855
1,000000000000000000 –0,000000000000000000 –0,000000000000000000]
[–0,002068086756255359 –0,010235712193313042 0,212783560138708852
–0,751836586731582393 1,000000000000000000 0,000000000000000000]
[0,000100000000000000 –0,001500000000000000 –0,021000000000000000
0,250000000000000000 –0,800000000000000000 1,000000000000000000]]

Ранг матрицы Крылова равен 5, метод Крылова сошелся, следовательно, мы получили уравнение характеристического полинома:

$$x^5 - 0{,}8x^4 + 0{,}25x^3 - 0{,}021x^2 - 0{,}0015x + 0{,}0001$$

3. К методу Лобачевского нахождения приближений корней в случае равномодульных

В настоящее время широко проводятся вычисления по поиску характеристических чисел матриц в задачах механики, химии, квантовой физики, экономики и др. [7, 8]. Во многих из этих задач все характеристические числа являются вещественными и можно применять метод Лобачевского для вещественных аргументов [11, 24], но в задачах колебательной физики встречаются и комплексные случаи [12]. Доктор физико-математических наук, профессор, глава кафедры МИФИ И.В. Савельев в одном из своих пособий писал, что квантовая физика состоит исключительно из задач с комплексными числами. В этой связи полезно рассмотреть метод Лобачевского в случае комплексных аргументов. Отметим сразу, что собственные числа симметричных матриц вещественны в силу эрмитовости (они равны своим комплексносопряженным, транспонированым) таких матриц [7]. Если заранее неизвестно, есть ли у матрицы невещественные собственные числа, то узнать это можно, применив метод Штурма [7] к характеристическому полиному матрицы, от которого отделены кратные корни с помощью алгоритма Евклида [5].

Чтобы получить характеристический полином, есть ряд методов, рассмотренных в [7]. Если точно известно, что матрица плохо обусловлена или вырождена, то необходимо использовать метод Фаддеева. Если неизвестно, вырождена матрица или нет, то следует использовать метод Крылова, на первом шаге проверяется методом исключения Гаусса [2, 3], вырождена матрица или нет, если мантисса при этих вычислениях была меньше, чем указано в [2, 3], то обязательно при вычислении детерминанта матрицы нужно вычислить ее обратную матрицу, перемножив прямую и обратную матрицы, их произведение необходимо сравнить с единичной матрицей. Если элементы матриц отличаются на величину по модулю, сильно превосходящую относительную точность вычислений и приближающуюся к единице, то нужно использовать корректную точность или метод Фаддеева. Если матрица вырождена, то необходимо использовать метод Фаддеева, в противном случае необходимо перейти к следующей стадии метода Крылова.

На следующем этапе составляем матрицу Крылова. Далее вычисляем ее детерминант, дублируя вычисления на единичном векторе. При вычислении детерминанта требования, предъявленные к точности вычислений, такие же, как и выше, правда, о точности проведенных

вычислений можно судить, сравнив количество значимых цифр детерминанта матрицы, вычисленного на первом шаге, и последний коэффициент присоединенного вектора. Для метода Крылова необходимо использовать архитектуру чисел floatEXT (чтобы не возникла проблема переполнения) с относительной точностью, как и в первом шаге (справедливость этого косвенно следует из результатов применения метода Фаддеева, при вычислении сумм миноров матрицы), или немного выше; непосредственные оценки, взятые из [2, 3], могут в этом случае дать сильно завышенные значения требуемой точности.

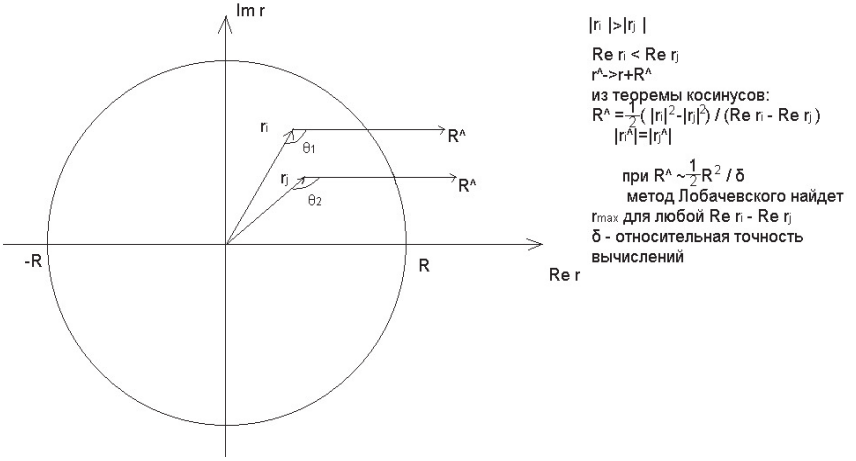


Рисунок 3.1.

Если полином масштабирован по первому коэффициенту (коэффициент перед x^{n-1} равен 1 или 0), то делаем замену:

$$\hat{x} = x + \hat{R}.$$

В случае метода сопровождающей матрицы — также еще следующую замену:

$$\hat{R} = R + 1,$$

где R — радиус круга нахождения корней полинома $P(x)$ из теоремы Руше [12] (см. главу 4). Данная замена гарантирует, что все корни будут иметь положительные вещественные части, а также, что отношение $|r_{min}|/|r_{max}|$ больше, чем $1/(2R+1)$, что равно верхней оценке для обратного числа обусловленности [4, 23] метода сопровождающей матрицы; здесь R не больше n в силу свойств кругов Гершгорина (см. гл. 4),

полученных при масштабировании начальной матрицы. Необходимо сразу отметить, что если значения матрицы заданы с относительной точностью $\hat{\delta}$, много меньшей относительной точности арифметических вычислений δ, и если судить о точности полученного результата, то из соотношения

$$\frac{|r_{min}|}{|r_{max}|} \approx \hat{\delta}$$

будет следовать, что необходима большая точность элементов матрицы — она плохо обусловлена. В [23] полагается

$$\hat{\delta} = 0,$$

что является недопустимым для матриц Гильберта – Антипина [3]. В них для расчета обусловленности необходима именно точная оценка, полученная в [4] для оценки корректности решения системы:

$$A_1 x = b_1 \Leftrightarrow (A + \Delta A)(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{er}) = (b + \eta),$$

где ΔA — погрешность задания системы; η — погрешность задания правой части системы; ***er*** — погрешность результата решения системы.

$$||er|| \le \frac{||A^{-1}|| \cdot ||\eta|| + ||\Delta A|| \cdot ||X||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||}, \; ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| < 1 \qquad (3.1)$$

или

$$||er|| \le ||A^{-1}|| \cdot (||\eta|| + ||\Delta A|| \cdot ||X^*||), \; X^* = X + er,$$

так как $||A^{-1}||$ — неизвестная величина, то следует последовательно искать $(A + \Delta A)^{-1}$ со все уменьшающейся ΔA, пока значащие цифры $(A + \Delta A)^{-1}$ не перестанут меняться. Нарушение условия (3.1) приводит к тому, что матрица вычисляется некорректно, если мы берем слишком большую ΔA.

Из условия

$$||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| \to 1 \qquad (3.2)$$

следует, что число обусловленности системы не меньше отношения модулей максимального и минимального собственного числа матрицы A:

$$\nu(A) \ge \frac{|r_{max}|}{|r_{min}|},$$

где согласно [4]:

$$\nu(A)=||A^{-1}||\cdot||A||\ \text{и}\ \frac{||er||}{||X||}\le\nu(A)\frac{||\eta||}{||b||}.$$

Заметим также, что условие (3.2) не равносильно условию:

$$||\Delta A||\to 0,$$

и именно условие (3.2) или (3.1) должно определять точность задания матрицы A.

Все вышесказанное можно рассмотреть на примере матрицы Гильберта – Антипина: определитель, которой был найден аналитически [3], вычисляя ее обратную матрицу, заметив при этом, что алгебраическое дополнение матрицы Гильберта – Антипина ее первого и последнего элемента в первом и последнем столбцах также являются определителями матриц Гильберта – Антипина. Они, деленные на детерминант исследуемой матрицы Гильберта – Антипина, дадут аналитическое выражение первого и последнего элемента в первом и последнем столбцах обратной к исследуемой матрицы, откуда можно судить о корректности вычислений.

Если матрицы Гильберта – Антипина $(1000/(998+i+j))$ брать с точностью 10^{-4k} меньшей 10^{-4n}, n-порядок матрицы, то $(|r_{min}|/|r_{max}|)$ оказывается большим 10^{-4k} в противовес $10^{-\ln k}$, принятой фон Нейманом для всякой матрицы, на основе данных Брагмана. В 50-е годы XX века в мире было немало выдающихся людей, среди которых фон Нейман занимал особое место, но вычислений, из которых можно было бы сделать статистику числовых полей определителей матриц, ни один научный центр того мира дать не мог. Самым передовым машинам того времени, которые буквально можно было пересчитать по пальцам, требовался час работы, чтобы вычислить один определитель 30-го порядка [15]. В то время, как показывают современные работы, вычисление 10^m матриц дает около $m/2$ цифр модуля среднего детерминанта [3], и составление статистики даже для небольших числовых полей заняло бы многие десятки тысяч лет у машин середины XX века. Для распределений матриц порядков выше 30 процессорные мощности быстро истощаются, и хорошим вопросом становится возможность считать не отдельные детерминанты матриц, а обратную матрицу к данной, которая содержит n^2 детерминантов матриц порядка $n-1$ деленных на детерминант исходной матрицы. Но насколько можно считать такое распределение случайным?

Для матриц порядка n при относительной точности вычислений $10^{-18}:||\Delta A||\sim n10^{-18}$. Так как любая норма матрицы больше любого модуля ее собственного значения [4], то можно подсчитать, что для матрицы Гильберта – Антипина $(1000/(998+i+j)):||A^{-1}||\sim 10^{4n}$ и условие (3.2) перестает выполняться уже для $n=4$. Для матриц Гильберта $(1/(i+j-1)):||A^{-1}||\sim 10^{n}$, и условие (3.2) перестает выполняться для $n=17$. В этой связи полезно рассмотреть собственные значения матриц Гильберта – Антипина при различных точностях задания ΔA.

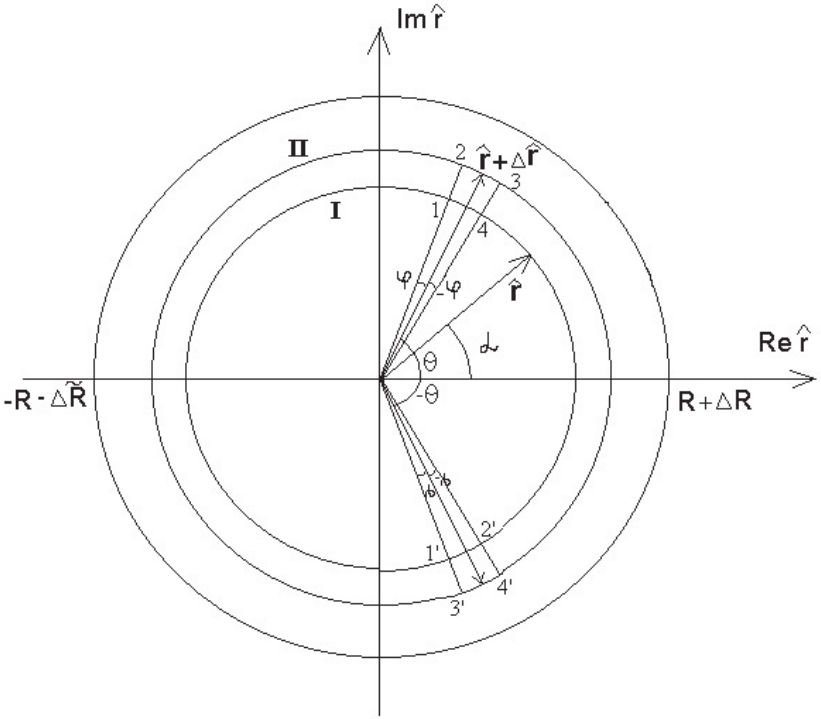


Рисунок 3.2

В случае метода Лобачевского необходимо, чтобы величина отношения корней полинома $|r_i|/|r_j|$ как можно сильнее отличалась от 1 в качестве $\hat{R}$. Примем величину $\hat{R}=(0{,}1+\varkappa)$, где $\varkappa$ — случайное число

от 0 до 0,1. В методе Лобачевского в случае близкого расположения корней к максимальному важно найти золотую середину между количеством возведений в степень и моментом, когда аргументы близлежащих степеней корней становятся сильно разными, но модули еще сохраняют близкое значение друг к другу: если с помощью максимального возведения в степень не удается найти корень, но на промежуточном возведении в степень это удается сделать, то это значение и следует принять за приближение к корню. В этом случае метод Лобачевского в каком-то смысле близок к асимптотическим рядам, основанным на формуле Эйлера – Маклорена (см. 2-й том [20]), которые стремятся к нужному значению до определенного значения члена ряда, после чего добавление новых членов делает ряд расходящимся, но все же следует заметить, что при неограниченном возведении в степень использование замены $\hat{x} = x + \hat{R}$ позволяет методу Лобачевского найти максимальный корень (выделить его среди остальных корней) с неограниченной точностью. Метод Лобачевского будет сходиться, если корни, меньшие максимального, будут лежать внутри круга I с радиусом $|r_{max}| - |\Delta r|$ или в секторе 1-2-3-4, образованном углом 2φ и кольцом между кругами I и II (в случае вещественного полинома сюда добавляется сектор 1'-2'-3'-4', комплексно сопряженный с сектором 1-2-3-4). $|\Delta r|$ и угол φ определяются из максимальной степени $p_{\max}$, в которую возводятся корни в методе Лобачевского, так угол $\varphi << 1 / p_{max}$, чтобы корни внутри сектора 1-2-3-4 при возведении в степень имели вещественные и мнимые части, мало отличающиеся от вещественной и мнимой части $\mathbf{r}_{max}^{p_{max}}$:

$$\mathbf{r}^{p_{max}} = |\mathbf{r}|^{p_{max}} e^{i\alpha p_{max}},$$

следовательно,

$$\mathbf{r}_{max}^{p_{max}} - \mathbf{r}^{p_{max}} = \mathbf{r}_{max}^{p_{max}} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_{max}}\right)^{p_{max}}\right) = |\mathbf{r}_{max}|^{p_{max}} \left(1 - \left(\frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}_{max}|}\right)^{p_{max}} e^{ip_{max}(\alpha-\theta)}\right),$$

если $|\alpha - \theta| << 1 / p_{max}$, то $|p_{max}(\alpha - \theta)| << 1$ и $e^{ip_{max}(\alpha-\theta)} \approx 1$, откуда следует, что корни внутри сектора 1-2-3-4 при возведении в степень p_{max} не изменят величины максимального корня полинома степени n, так как максимальное число корней, отличных от максимального, равно $n-1$, то даже если все корни лежат в секторе 1-2-3-4:

$$(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k^{p_{max}})^{\frac{1}{p_{max}}}=\mathbf{r}_{max}(\sum_{k=1}^{n}(\frac{\mathbf{r}_k}{\mathbf{r}_{max}})^{p_{max}})^{\frac{1}{p_{max}}},$$

то для всех k:

$$|\mathbf{r}_k|\approx|\mathbf{r}_{max}|,$$

$$|\alpha_k-\theta|<<\frac{1}{p_{max}},$$

$$(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k^{p_{max}})^{\frac{1}{p_{max}}}=\mathbf{r}_{max}\cdot n^{\frac{1}{p_{max}}},$$

но из разложения Маклорена для экспоненты [20]:

$$n^{\frac{1}{p_{max}}}=e^{p_{max}^{-1}\ln n}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\ln n}{p_{max}})^k/k!<(1-\frac{\ln n}{p_{max}})^{-1}=\frac{p_{max}}{p_{max}-\ln n},\qquad(3.3)$$

$$\ln n<p_{max},$$

как сумма убывающей геометрической прогрессии, следовательно, при $p_{max}>>\ln n$:

$$n^{\frac{1}{p_{max}}}\approx 1,$$

откуда

$$(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k^{p_{max}})^{p_{max}^{-1}}\approx\mathbf{r}_{max}.$$

Для оценки радиуса круга I зададимся условием того, что при возведении в степень p_{max} максимального по модулю корня он должен быть много больше суммы остальных корней, возведенных в степень p_{max}:

$$\mathbf{r}_{max}^{p_{max}}>>\sum_{k=1,\,r_{max}\neq r_k}^{n}\mathbf{r}_k^{p_{max}}.$$

Откуда:

$$|\mathbf{r}_{max}|^{p_{max}}\cdot e^{ip_{max}\theta}>>\sum_{k=1,\,r_{max}\neq r_k}^{n}|\mathbf{r}_k|^{p_{max}}\cdot e^{ip_{max}\alpha_k};$$

$$|\mathbf{r}_{max}|^{p_{max}}>>\sum_{k=1,\,r_{max}\neq r_k}^{n}|\mathbf{r}_k|^{p_{max}}\cdot e^{ip_{max}(\alpha_k-\theta)},\qquad(3.4)$$

так как

$$\sum_{k=1,\, r_{max}\neq r_k}^{n} |\mathbf{r}_k|^{p_{max}} \cdot \cos(p_{max}(\alpha_k - \theta)) \leq \sum_{k=1,\, r_{max}\neq r_k}^{n} |\mathbf{r}_k|^{p_{max}}; \qquad (3.5)$$

$$\sum_{k=1,\, r_{max}\neq r_k}^{n} |\mathbf{r}_k|^{p_{max}} \cdot \sin(p_{max}(\alpha_k - \theta)) \leq \sum_{k=1,\, r_{max}\neq r_k}^{n} |\mathbf{r}_k|^{p_{max}}.$$

Следовательно, метод Лобачевского применим только для полиномов с вещественными коэффициентами, чтобы выполнилось условие:

$$\sum_{k=1,\, r_{max}\neq r_k}^{n} |\mathbf{r}_k|^{p_{max}} \cdot \sin(p_{max}(\alpha_k - \theta)) = 0.$$

Это условие не является ограничивающим для метода Лобачевского, так как все собственные значения матрицы

$$C_{n\times n} = A_{n\times n} + i \cdot B_{n\times n},$$

где $A_{n\times n}$ и $B_{n\times n}$ состоят из вещественных элементов, содержатся среди собственных значений матрицы:

$$D_{2n\times 2n} = \begin{Vmatrix} A_{n\times n} & -B_{n\times n} \\ B_{n\times n} & A_{n\times n} \end{Vmatrix} \qquad (3.6)$$

вместе со своими комплексно сопряженными значениями.

Например, пусть

$$A_{n\times n} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 9 & 4 & 4 \end{Vmatrix};$$

$$B_{n\times n} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Собственными значениями $C_{n\times n}$ будут:

$$23{,}112636 + 2{,}8845795i$$
$$-1{,}0569816 - 5{,}4239609i$$
$$-0{,}9819772 + 3{,}5408687i$$
$$-0{,}0736776 - 1{,}0014874i$$

Собственными значениями $D_{2n\times 2n}$ будут:

$$23{,}112636+2{,}8845795i$$
$$23{,}112636-2{,}8845795i$$
$$-1{,}0569816+5{,}4239609i$$
$$-1{,}0569816-5{,}4239609i$$
$$-0{,}9819772+3{,}5408687i$$
$$-0{,}9819772-3{,}5408687i$$
$$-0{,}0736776+1{,}0014874i$$
$$-0{,}0736776-1{,}0014874i$$

Другой пример:

$$A_{n\times n}=\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 9 & 4 & 4 \end{Vmatrix};$$

$$B_{n\times n}=\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 41 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Собственными значениями $C_{n\times n}$ будут:

$$-4{,}2927045-20{,}022597i$$
$$19{,}811748+16{,}849514i$$
$$4{,}6276709+11{,}202779i$$
$$0{,}8532855+3{,}9703039i$$

Собственными значениями $D_{2n\times 2n}$ будут:

$$19{,}811748+16{,}849514i$$
$$19{,}811748-16{,}849514i$$
$$-4{,}2927045+20{,}022597i$$
$$-4{,}2927045-20{,}022597i$$
$$4{,}6276709+11{,}202779i$$
$$4{,}6276709-11{,}202779i$$
$$0{,}8532855+3{,}9703039i$$
$$0{,}8532855-3{,}9703039i$$

Так как из определения собственных чисел:

$$C_{n\times n}\cdot\overrightarrow{v_j}=(A_{n\times n}+i\cdot B_{n\times n})\overrightarrow{v_j}=$$

$$=A_{n\times n}\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j}-B_{n\times n}\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j}+i\cdot(A_{n\times n}\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j}+B_{n\times n}\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j})=$$

$$=\lambda_j\cdot\overrightarrow{v_j}=(\alpha+i\cdot\beta)\overrightarrow{v_j}=(\alpha\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j}-\beta\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j})+i\cdot(\alpha\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j}+\beta\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j}),$$

для собственного вектора $\overrightarrow{v_j}$ числа $\lambda_j=(\alpha+i\beta)$. То, введя в рассмотрение вектор:

$$\overrightarrow{V1}_j=\left\|\begin{matrix}-\mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j}+i\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j}\\ \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j}+i\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j}\end{matrix}\right\| \tag{3.7}$$

для матрицы $D_{2n\times 2n}$, получим:

$$D_{2n\times 2n}\cdot\overrightarrow{V1_j}=\left\|\begin{matrix}A_{n\times n}\cdot(-\mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j}+i\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j})-B_{n\times n}\cdot(\mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j}+i\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j})\\ A_{n\times n}\cdot(\mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j}+i\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j})+B_{n\times n}\cdot(-\mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j}+i\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j})\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}-(\alpha\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j}+\beta\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j})+i(\alpha\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j}-\beta\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j})\\ (\alpha\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j}-\beta\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j})+i(\alpha\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{v_j}+\beta\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{v_j})\end{matrix}\right\|=$$

$$=\alpha\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{V1_j}+i\cdot\alpha\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{V1_j}+i\cdot\beta\cdot \mathrm{Re}\,\overrightarrow{V1_j}-\beta\cdot \mathrm{Im}\,\overrightarrow{V1_j},$$

т.е. $\lambda_j=(\alpha+i\beta)$ является собственным числом собственного вектора $\overrightarrow{V1_j}$ матрицы $D_{2n\times 2n}$.

Аналогично доказывается, что $\overline{\lambda_j}=(\alpha-i\beta)$ является собственным числом собственного вектора $\overrightarrow{V2_j}$ матрицы $D_{2n\times 2n}$:

$$\overrightarrow{V2_j}=\left\|\begin{matrix}-Im\,\overrightarrow{v_j}-i\cdot Re\,\overrightarrow{v_j}\\ Re\,\overrightarrow{v_j}-i\cdot Im\,\overrightarrow{v_j}\end{matrix}\right\|. \tag{3.8}$$

В случае полиномов с вещественными коэффициентами для выполнения (3.4) достаточно, чтобы

$$|\mathbf{r}_{max}|^{p_{max}}>>\sum_{k=1,\,r_{max}\neq r_k}^{n}|\mathbf{r}_k|^{p_{max}}.$$

I. Случай вещественного $r_{\mathbf{max}}$.

Если модули всех корней, не считая $r_{\mathbf{max}}$, меньше, чем $|r|$, то условие доминирования запишется в виде:

$$|\mathbf{r}_{max}|^{p_{max}} >> (n-1)\cdot|\mathbf{r}|^{p_{max}};$$

$$|\mathbf{r}_{max}|^{p_{max}} = 10^{limit}\cdot(n-1)\cdot|\mathbf{r}|^{p_{max}};$$

$$\frac{|\mathbf{r}_{max}|}{|\mathbf{r}|} = (10^{limit}\cdot(n-1))^{p_{max}^{-1}},$$

обозначим:

$$|\Delta r| = |r_{\mathbf{max}}| - |r|;$$

$$|\Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_{max}|\cdot(1-(10^{limit}\cdot(n-1))^{-p_{max}^{-1}}).$$

При $p_{max}\to\infty$: $|\Delta r|\to 0$ => метод Лобачевского сходится.

II. Случай комплексно сопряженного $r_{\mathbf{max}}$.

Если модули всех корней, не считая $|r_{\mathbf{max}}|$, меньше, чем $|r|$, то условие доминирования запишется в виде:

$$|\mathbf{r}_{max}|^{p_{max}} >> \sum_{k=1,|r_{max}|\neq|r_k|}^{n} |\mathbf{r}_k|^{p_{max}}.$$

И условие доминирование при учете комплексно сопряженного значения $r_{\mathbf{max}}$ запишется в виде:

$$|\mathbf{r}_{max}|^{p_{max}} >> 0{,}5\cdot(n-2)\cdot|\mathbf{r}|^{p_{max}}.$$

Если модули всех корней, не считая $r_{\mathbf{max}}$, меньше, чем $|r|$, то условие доминирования перепишется в виде:

$$|\Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_{max}|\cdot(1-(10^{limit}\cdot 0{,}5\cdot(n-2))^{-p_{max}^{-1}}),$$

где $|\Delta r| = |r_{\mathbf{max}}| - |r|$.

При $p_{max}\to\infty$: $|\Delta r|\to 0$, следовательно, метод Лобачевского сходится.

Понять, к какому типу принадлежит корень — вещественному или комплексно сопряженному, очень легко, рассматривая последовательно суммы S_m и $({S_m}^2 - S_{2m})/2$, где S_m — сумма корней полинома, возведенных в степень m — степень двойки. Одна из которых при достаточно больших m должна сходиться к определенному значению.

При современном уровне развития ЭВМ метод Лобачевского не может различить корни, отстоящие друг от друга много менее 10^{-6} от их величины при порядке полинома, большим 10^4. Исключение составляют чисто вещественные корни, для которых максимальный корень

будет вычислен с относительной точностью 10^{-6}, как бы близко к нему не приближались другие корни (см. (3.3)). Если порядок полинома n менее, чем $(p^2/(2\log_2 p))^{1/3}$, то p_{max} можно сделать неограниченно большой за счет вычисления p_{max} — степени двойки сопровождающей матрицы полинома. Вычисляя след последовательно перемноженных сопровождающих матриц, придем к итерационной формуле Ньютона для вычисления суммы корней полинома, возведенных в некоторую степень. След этой матрицы [7] будет суммой корней полинома, возведенных в p_{max}. Если мы имеем дело с эрмитовой матрицей порядка менее 10^3, то ее максимальное характеристическое число лучше находить, вычислив ее двоичные степени (вычисление матрицы Крылова требует порядка n^3 дополнительных операций, алгоритм Гаусса — порядка $2/3n^3$ дополнительных операций), минимальное же характеристическое число определится из вычисления двоичных степеней к матрицы, обратной к данной, возведение в нечетную степень может дать не сходящуюся к корню величину (равномодульные, разных знаков), аналогично случаю, рассмотренному выше.

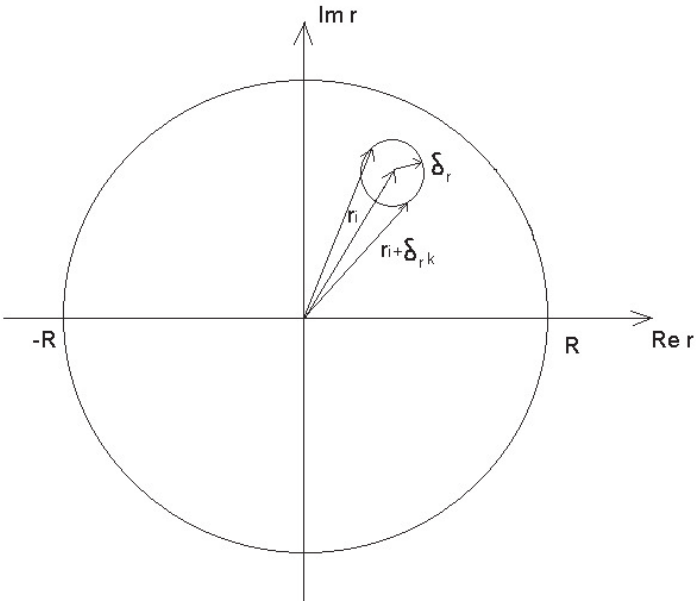


Рисунок 3.3

Для метода Троицы Лаггера – Ньютона – Чебышева поиск равномодульных корней с достаточно сильно различающимся аргументом не вызывает трудностей. Более того, замена $\hat{x} = x + \hat{R}$ хотя и позволяет в точке начального приближения выбирать только точки с положительными вещественными частями, но часто бывает вредна, так как корни много меньшие $\hat{R}$ становятся хуже различимы, и здесь лишь помогает масштабирование (оно сводит на нет ситуацию $(|r_{min}|/|r_{max}|) \sim \delta$, также без него нельзя найти корни некоторых полиномов (характеристический многочлен матрицы Гильберта – Антипина $(1000/(998+i+j))$ [3]) порядка 21), комплексные значения которых также малы, как и действительные. Кроме того, в случае локализации корней внутри окружности малого радиуса δ_r с центром, далеким от начала координат (см. рис. 3.3), масштабирование позволяет переместить эту окружность к началу координат, делая радиус локализации корней не R, а порядка δ_r, делая поиск корней более быстрым. В некоторых случаях, например, для характеристического многочлена матрицы Гильберта – Антипина масштабирование сводит на нет ситуацию с близким расположением корней: $max_{ij}(|r_i| - |r_j|) \sim \delta$, δ — относительная точность вычислений. В других случаях, например для матриц Вилкинсона [10], проблема остается) полинома по коэффициенту перед x^{n-1}, если он равен 0, то по первому после него не равному 0, если он сильно отличен от 1 и одновременный поиск корня прямого и обратного полинома. Фактически мы пришли к разделению задачи поиска собственных значений на 3 направления. Первым являются задачи, в которых

$$(|r_{min}|/|r_{max}|) >> \delta \qquad (*)$$

и

$$max_{ij}(|r_i| - |r_j|) >> \delta \qquad (**)$$

— они одинаково хорошо решаются как методом Троицы Лаггера – Ньютона – Чебышева, так и методом сопровождающей матрицы. Второе направление представляет собой случай, когда не выполняется (**) — здесь лучше использовать метод сопровождающей матрицы. Чтобы выполнялось (*), необходимо дополнительно использовать замену $\hat{R} = R + 1$. В третьем направлении выполняется (**) — здесь лучше работает Троица Лаггера – Ньютона – Чебышева). В [8] утверждается, что метод Лаггера сходится к корню, если все корни вещественные, при

любом начальном приближении. У характеристического многочлена матрицы Гильберта – Антипина $\left(1000/\left(998+i+j\right)\right)$ порядка 21 или даже 9, к которому не будет применяться масштабирование, метод Лаггера не сойдется, хотя все корни вещественные за счет симметрии и вещественности матрицы [7] Гильберта – Антипина и начальное приближение близко к ним. Метод Троицы Лаггера – Ньютона – Чебышева более быстро, чем метод Лаггера, отыскивает корень на фазе "Троица", и так же, как и метод Лаггера, приближается к корню на фазе "Лаггер", получив достаточное приближение, мгновенно достигает нужной точности определения корня на фазе "Ньютон" или "Чебышев" [20]. За счет чего он сходится быстрее и точнее метода Лаггера как к комплексным, так и вещественным корням всех известных тестовых матриц [3, 10] (для близко лежащих друг к другу корней этот процесс довольно медленен), но его намного труднее реализовать и сопровождать.

Замена $x \to \hat{x}$ позволяет избавиться от корней с одинаковыми модулями, кроме случая корня на вещественной оси и одного комлексно сопряженного корня с модулем, равным вещественному корню. Действительно, из теоремы Пифагора для квадрата модуля любого корня имеем: $|r_i|^2=(\mathrm{Re}r_i)^2+(\mathrm{Im}r_i)^2$, после замены $x \to \hat{x}=x+\hat{R}$:

$$|\mathbf{r}_i|^2=(\mathrm{Re}\,\mathbf{r}_i)^2+(\mathrm{Im}\,\mathbf{r}_i)^2=|\mathbf{r}_i|^2+(\hat{R})^2+2\cdot\hat{R}\cdot(\mathrm{Re}\,\mathbf{r}_i).$$

Если взять два корня с одинаковым модулем (кратные отсутствуют), то после замены $x \to \hat{x}$ их разность запишется в виде:

$$|\mathbf{r}_i|^2-|\mathbf{r}_j|^2=2\cdot\hat{R}\cdot((\mathrm{Re}\,\mathbf{r}_i)-(\mathrm{Re}\,\mathbf{r}_j))=0,$$

что возможно только, если $(\mathrm{Re}\,\mathbf{r}_i)=(\mathrm{Re}\,\mathbf{r}_j)$, что в случае равномодульных корней влечет за собой $(\mathrm{Im}r_i)=|\mathrm{Im}r_j|$, но по условию кратных корней нет. Окончательно получаем, что все равномодульные корни станут разномодульными, кроме случая одного комплексно сопряженного корня.

Из теоремы косинусов следует, что после замены $x \to \hat{x}$ корень, не являющийся r_j максимальным по модулю r_i, может иметь максимальный модуль только, если

$$\hat{R}=0{,}5\frac{|\mathbf{r}_i|^2-|\mathbf{r}_j|^2}{\mathrm{Re}\,\mathbf{r}_j-\mathrm{Re}\,\mathbf{r}_i}=R_{cos}, \qquad (3.9)$$

(отсюда же следует, что 2 корня могут стать равномодульными, только если $\hat{R} = R_{cos}$), если $\hat{R}$ больше этой величины, то получим новый максимальный модуль и равный ему корень. При условии равенства $\hat{R} = R_{cos}$ метод Лобачевского не сойдется и в качестве $\hat{R}$ придется брать $0,1R$ или еще меньшую величину, но условие $\hat{R} = R_{cos}$ не может осуществиться ввиду произвольности величины $\hat{R}$ и детерминированности корней полинома.

Заметим также, что теорема Руше (Euge`ne Rouche (1832–1910) [24]) является следствием принципа аргумента, к которому пришел Коши, развивая методы Эйлера [12].

Также следует отметить, что замена $x \to \hat{x}$ еще замечательна и тем, что сводит на нет арифметическое накопление ошибки, связанное с величиной $(|r_{min}|/|r_{max}|) > \delta$, где δ — относительная точность вычислений в методе сопровождающей матрицы или Троицы Лаггера – Ньютона – Чебышева.

4. Поиск корней полиномов. Метод Троицы Лагерра – Ньютона – Чебышева нахождения корня полинома с произвольными коэффициентами

Пусть есть полином:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j ,$$

$$x, a_j \in C ,\ j \in \{0,...,n\} .$$

Из основной теоремы алгебры известно, что данный полином имеет n вещественных или комплексных корней [12]. Для их поиска существует много способов [4, 8, 27]: метод Ньютона, метод Мюллера, метод сопровождающей матрицы и другие. Но какие из них сойдутся к корню полинома? Если полином имеет комплексные корни, то метод Ньютона с вещественным начальным приближением его не отыщет. То же во многих случаях относится и к методу Мюллера. Лагерр предложил метод, который работает быстрее метода Мюллера, и американские исследователи Дженкинс и Трауб утверждают, что доказали, будто он сходится ко всем корням вещественного полинома, то есть когда кроме вещественных корней есть еще комплексно сопряженные корни. В этом случае все $a_j \in \mathrm{Re}$. Следуя формуле (3.6), легко доказать, что при всяком $a_j \in C$ полином $P_n(x)$ можно преобразовать в другой полином $\tilde{P}_{2n}(x)$ с вещественными коэффициентами, корнями которого являются комплексно сопряженные корни полинома $P_n(x)$. Для этого достаточно построить сопровождающую матрицу полинома $P_n(x)$ и построить соответствующую ей матрицу $D_{2n\times 2n}$, характеристический полином которой обладает необходимыми свойствами.

Далее несколько преобразовав метод Лагерра, для ускорения поиска корня и достижения требуемой точности придем к методу, который назовем Троица Лагерр – Ньютон – Чебышев в честь великих математиков, посвятивших долгие годы своей жизни поиску корней различных функций и новому методу поиска корней, открытого совсем недавно. Чтобы перейти к рассмотрению метода Троица Лагерр – Ньютон – Чебышев, остановимся на отделении кратных корней полинома с помощью алгоритма Евклида [5].

Доказательство алгоритма Евклида для полиномов

Из основной теоремы алгебры следует, что любой полином можно представить в виде:

$$P_n(x)=\prod_{j=1}^{k}(x-r_j)^{\alpha_j},$$

где все r_j различны и $\sum_{j=0}^{k}\alpha_j=n$. Здесь α_j — показатель кратности; если он больше 1, то полином имеет несколько корней r_j. Алгоритм Евклида позволяет найти полиномы $Q(x)$ и $S(x)$ такие, что

$$Q(x)=\prod_{j=1}^{k}(x-r_j);$$

$$S(x)=\prod_{j=1}^{k}(x-r_j)^{\alpha_j-1};$$

$$P_n(x)=S(x)\cdot Q(x).$$

Производную многочлена $P_n(x)$ можно записать в виде

$$P_{n-1}^{(1)}(x)=S(x)\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j\cdot Q(x)}{x-r_j},$$

т.е. многочлен и его производная имеют $S(x)$ в качестве общего множителя, так как

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j\cdot Q(x)}{x-r_j},$$

при x равным любому из r_j не обращается в 0, то $S(x)$ является наибольшим кратным этих многочленов. Тогда

$$P_n(x)/P^{(1)}{}_{n-1}(x)=B_1(x)+C_1(x)/P^{(1)}{}_{n-1}(x),$$

где $C_1(x)$ является остатком от деления $P_n(x)$ на $P^{(1)}{}_{n-1}(x)$, и из равенства

$$P_n(x)-B_1(x)P^{(1)}{}_{n-1}(x)=C_1(x)$$

должен иметь $S(x)$ в качестве своего множителя.

Далее делим $P^{(1)}{}_{n-1}(x)$ на $C_1(x)$:

$$P^{(1)}{}_n(x)/C_1(x)=B_2(x)+C_2(x)/C_1(x),$$

где $C_2(x)$ является остатком от деления ${P^{(1)}}_n(x)$ на $C_1(x)$ и из равенства

$$ {P^{(1)}}_n(x) - B_2(x)C_1(x) = C_2(x) $$

должен иметь $S(x)$ в качестве своего множителя.

Продолжая аналогичные деления, найдем $S(x)$ в качестве последнего ненулевого остатка $C_p(x)$.■

Будем далее считать, что полином $P_n(x)$ не имеет кратных корней. Запишем его выражение в виде:

$$ P_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - r_j), $$

натуральный логарифм $P_n(x)$ примет вид:

$$ \ln P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - r_j). $$

Выражение для его производной запишется в виде:

$$ {P^{(1)}}_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^{n} P_n(x) / (x - r_j). $$

Тогда производная натурального логарифма $P_n(x)$ примет вид:

$$ (\ln P_n(x))^{(1)}{}_x = {P^{(1)}}_{n-1}(x) \ / P_n(x) \ = \sum_{j=1}^{n} 1 / (x - r_j). \qquad (4.0.1) $$

Вторая производная натурального логарифма $P_n(x)$ примет вид:

$$ (\ln P_n(x))^{(2)}{}_{xx} = \frac{{P^{(2)}}_{n-2}(x)}{P_n(x)} - \left(\frac{{P^{(1)}}_{n-1}(x)}{P_n(x)} \right)^2 = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(x - r_j)^2}. \qquad (4.0.2) $$

Далее Лагерр сделал предположение, которое по сути своей совпадает с интерполированием по Эрмиту функции в заданной точке (см. 2-й том [20]). А именно: в некоторой точке x_k значение, производная и вторая производная интерполирующего полинома $(H_n(x))_k = (x - q_k)(x - w_k)^{n-1}$, соответственно, совпадают со значением, производной и второй производной полинома $P_n(x)$, а также совпадает степень этих полиномов, и интерполяционный полином имеет $(n-1)$-кратный узел. Тогда из (4.0.1) и (4.0.2) для узлов q_k и w_k интерполяционного полинома справедлива система:

$$P^{(1)}{}_{n-1}(x_k)/P_n(x_k)=(n-1)(x_k-w_k)^{-1}+(x_k-q_k)^{-1};$$

$$\frac{P^{(2)}{}_{n-2}(x_k)}{P_n(x_k)}-\left(\frac{P^{(1)}{}_{n-1}(x_k)}{P_n(x_k)}\right)^2=-\frac{n-1}{(x_k-w_k)^2}-\frac{1}{(x_k-q_k)^2}.$$

Откуда придем к квадратному уравнению относительно $(x_k-q_k)^{-1}$:

$$a\left(x_k-q_k\right)^{-2}-2b\left(x_k-q_k\right)^{-1}-c=0,$$

где $a=1+1/\left(n-1\right);\ b=1/\left(n-1\right)P^{(1)}{}_{n-1}\left(x_k\right)/P_n\left(x_k\right);$

$$c=(1-1/(n-1))(P^{(1)}{}_{n-1}(x_k)/P_n(x_k))^2-P^{(2)}{}_{n-2}(x_k)/P_n(x_k),$$

откуда

$$(x_k-q_k)^{-1}=b\pm(b^2+ac)^{0,5}.$$

Вычислив оба значения q_k, найдем два значения w_k и найдем минимальный модуль из (x_k-w_k) и (x_k-q_k). Это значение без модуля и станет точкой построения следующего интерполирующего полинома $(H_n(x))_{k+1}=(x-q_{k+1})(x-w_{k+1})^{n-1}$. Продолжая этот процесс, найдем корень с определенной точностью.

Можно усовершенствовать метод Лагерра, строя интерполирующий полином $(H_n(x))_k=(x-g_k)(x-q_k)(x-w_k)^{n-2}$, с $(n-2)$-кратными узлами не по трем, а по четырем точкам совмещения с полиномом $P_n(x)$. Для этого вычислим третью производную натурального логарифма $P_n(x)$:

$$(\ln P_n(x))^{(3)}{}_{xxx}=\frac{P^{(3)}{}_{n-3}(x)}{P_n(x)}-\frac{3P^{(2)}{}_{n-2}(x)P^{(1)}{}_{n-1}(x)}{P^2{}_n(x)}+2\left(\frac{P^{(1)}{}_{n-1}(x)}{P_n(x)}\right)^3=$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(x-r_j)^3}.$$

Она и даст четвертую точку совмещения с полиномом $P_n(x)$. Также удобно ввести обозначения:

$$\mathrm{dif}=(\ln P_n(x))^{(1)}{}_x=(\ln P_n(x))^{(1)}{}_x=P^{(1)}{}_{n-1}(x)/P_n(x);$$

$$\mathrm{sec}=(\ln P_n(x))^{(2)}{}_{xx}=P^{(2)}{}_{n-2}(x)/P_n(x)-(P^{(1)}{}_{n-1}(x)/P_n(x))^2;$$

$$\mathrm{thi} = (\ln P_n(x))^{(3)}{}_{xxx} = \frac{P^{(3)}{}_{n-3}(x)}{P_n(x)} - \frac{3P^{(2)}{}_{n-2}(x)P^{(1)}{}_{n-1}(x)}{P^2{}_n(x)} + 2\left(\frac{P^{(1)}{}_{n-1}(x)}{P_n(x)}\right)^3.$$

Тогда придем к системе уравнений относительно неизвестных $(x-g_k)$, $(x_к-q_k)$, $(x_к-w_k)$:

$$(n-2)(x_к-w_k)^{-1}+(x_к-q_k)^{-1}+(x_к-g_k)^{-1}=\mathrm{dif};$$
$$(n-2)(x_к-w_k)^{-2}+(x_к-q_k)^{-2}+(x_к-g_k)^{-2}=-\mathrm{sec};$$
$$(n-2)(x_к-w_k)^{-3}+(x_к-q_k)^{-3}+(x_к-g_k)^{-3}=\mathrm{thi}/2.$$

Из первого уравнения, выражая $(x_к-w_k)^{-1}$ через $(x_к-q_k)^{-1}$ и $(x_к-g_k)^{-1}$, и делая замену $t=(x_к-q_k)^{-1}+(x_к-g_k)^{-1}$ и $p=(x_к-q_k)^{-1}(x_к-g_k)^{-1}$, придем к системе относительно t и p:

$$-(\mathrm{dif}-t)^2/(n-2)=\mathrm{sec}+t^2-2p; \qquad (4.1.1)$$
$$2(\mathrm{dif}-t)^3/(n-2)^2=\mathrm{thi}-2t(t^2-3p). \qquad (4.1.2)$$

Откуда для t получаем кубическое уравнение:

$$2(\mathrm{dif}-t)^3/(n-2)^2=\mathrm{thi}-2t^3+3t\left(\mathrm{sec}+t^2+(\mathrm{dif}-t)^2/(n-2)\right). \qquad (4.2)$$

Решая его, и последовательно находя t и соответствующие им p, найдем затем поправки к начальному приближению x_k, всего их будет 9, и необходимо выбрать ту, модуль которой будет наименьшим. Продолжая процесс интерполирования, для некоторого $(k+j)$ придем к корню с заданной точностью, о величине которой можно судить, либо подставив $x_{к+j}$ в $P_n(x)$, либо оценив разность между $x_{к+j}$ и $x_{к+j+1}$. Если мы получили ряд корней, сильно отличающихся относительно: $(|r_{min}|/|r_{max}|)\sim\delta$, либо наоборот, сильно близких друг к другу абсолютно: $max_{ij}|r_i-r_j|\sim\delta$ (здесь в обоих случаях δ — наибольшее из точности задания коэффициентов уравнения или точности проведения расчетов), то вычисления надо провести с большей точностью и желательно с большей точностью задания коэффициентов, без этого нет никаких оснований говорить о нахождении корней уравнения.

Важным отличием интерполяционных полиномов с $(n-2)$-кратными узлами от интерполяционных полиномов с $(n-1)$-кратным узлом, кроме его более быстрого обнаружения корня, является то, что при

вещественном x_k и вещественных коэффициентов $P_n(x)$ один из корней интерполяционного полинома всегда будем вещественным, так как в этом случае обязательно будет вещественным одно из значений t, а следовательно, и $(x_к - w_k)^{-1}$.

Для решения произвольного кубического уравнения с комплексными коэффициентами:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

или

$$x^3 + b/ax^2 + c/ax + d/a = 0;$$

$$x + b/(3a) = y.$$

Тогда кубическое уравнение запишется в виде:

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \qquad (4.3)$$

и его решение запишется в виде

$$y_1 = u + v,\ y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v,\ y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$

где $u = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$; $v = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$; $\varepsilon_{12} = -0{,}5 \pm 0{,}5i3^{0{,}5}$.

В отличие от обычной формулы Кардано здесь возникает задача нахождения комплексного корня третьей и второй степени, для чего в том числе необходимо решить задачу о трисекции угла, а также более сложный вопрос: как должны располагаться тройки значений u и тройки значений v между собой в комплексном пространстве, чтобы дать значение корня в (4.3)? Я не нашел лучшего ответа, как просто взять одно значение u и прибавлять к нему каждое из трех v, пока не найдется корень (4.3). Остальные 2 корня определятся из равенств: $y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v$, $y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v$.

Перейдем к нахождению комплексных корней.

Пусть $c = x + iy = |c| e^{i\alpha}$ и надо найти

$$\sqrt{c} = \tilde{x} + i \cdot \tilde{y} = \sqrt{|c|} \cdot e^{i \cdot (\alpha/2 + \pi \cdot n)}, n \in Z.$$

Для этого достаточно знать корень его модуля и угол α.

$$|c|^2 = x^2 + y^2,\ \mathrm{tg}\arg c = y/x = \mathrm{tg}\,\alpha,$$

тогда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 2\mathrm{tg}(\alpha/2)/(1 - \mathrm{tg}^2(\alpha/2)),$$

откуда

$$\mathrm{tg}(\alpha/2)_{12} = -1/\mathrm{tg}\,\alpha \pm (1/\mathrm{tg}^2\alpha + 1)^{0{,}5} = -1/\mathrm{tg}\,\alpha \pm |c|/|y|,$$

если

$$\alpha \in \text{I,II}: -"+";$$
$$\alpha \in \text{III,IV}: -"-".$$

$$\tilde{x} = \pm\sqrt{\frac{|c|^2}{1+tg^2(\alpha/2)}} = \pm|c|\cdot cos(\alpha/2); \qquad (4.3.1)$$
$$\tilde{y} = |c|\cdot sin(\alpha/2),$$

если

$$\alpha \in \text{I,II}: -"+";$$
$$\alpha \in \text{III,IV}: -"-".$$

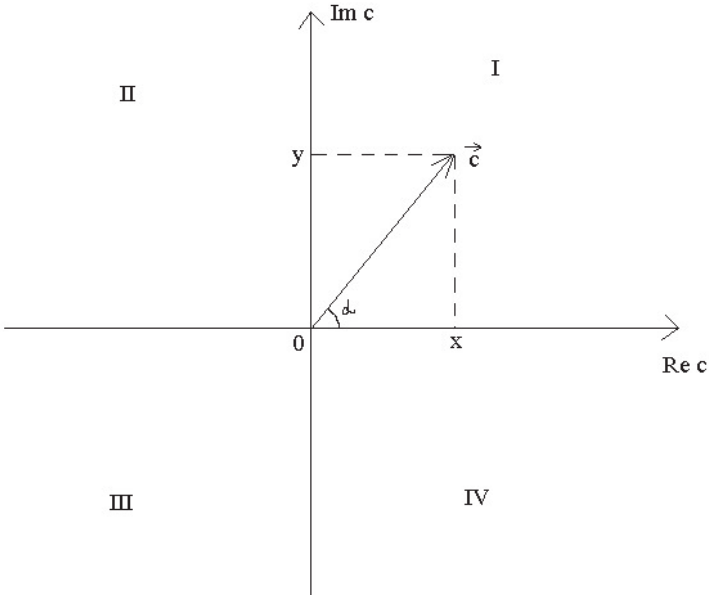


Рисунок 4.1

В вычислениях предпочтительней использовать sin и cos, так как tg обращается в бесконечность.

Перейдем к вычислению корня 3-й степени от комплексной переменной. Пусть $c = x + iy = |c|e^{i\alpha}$ и надо найти

$$\sqrt[3]{c} = \tilde{x} + i\cdot\tilde{y} = \sqrt[3]{|c|}\cdot e^{i\cdot(\alpha/3+2\cdot\pi\cdot n/3)}, n \in Z.$$

Для этого достаточно знать корень третьей степени его модуля и угол α.

$\sqrt[3]{c}$ можно вычислить, применив итерационный процесс Ньютона:

$$x_n = (2 \cdot x_{n-1} + |\hat{c}| / x_{n-1}^2) / 3, |\hat{c}| \in (0,9;1). \quad (4.3.2.1)$$

Начальное приближение выбираем, следуя [2]. Так как $\cos\alpha = 4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3)$, то чтобы найти cos трети угла, используем итерационный процесс Ньютона нахождения корня функции $f(z) = 4z^3 - 3z - h$, $h = \cos\alpha$. $f^{(1)}{}_z(z) = 12z^2 - 3$ и для сходимости метода к корню надо найти достаточно близкое начальное приближение [20], $\tilde{h} = \sqrt{0,5 \cdot (1 \pm \sqrt{0,5 \cdot (1+h)})}$, "+" – берем, если $\alpha \in$ I,II квадрантам, "–" – берем, если $\alpha \in$ III,IV квадрантам. Итерационный процесс будет выглядеть следующим образом:

$$(cos\frac{\alpha}{3})_n = z_n = z_{n-1} - f(z_{n-1}) / f_z^{(1)}(z_{n-1}) = \frac{8z_{n-1}^3 + \tilde{h}}{12z_{n-1}^2 - 3}. \quad (4.3.2.2)$$

После нахождения $\cos(\alpha/3)$ с заданной точностью увеличиваем аргумент в нужное количество раз с помощью формулы: $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$.

Интерполирующие полиномы, использующие четвертые производные, также возможно построить и определять их корни. Это, например, будет разложение данного полинома в ряд Маклорена до четвертой производной, в точке начального приближения x_k. Но поиск корней данного интерполирующего полинома, как и его аналогов, потребует на каждой итерации слишком многих вычислений корней, которые при относительной точности вычислений не более 10^{-19} не смогут давать сколько-нибудь многозначащих цифр корня.

В случае плохой обусловленности полинома:

$$\frac{|r_{min}|}{|r_{max}|} \sim \delta;$$

$$\max_{i,j} |r_i - r_j| \sim \delta.$$

Ни «Троица», ни метод «Лагерра» не смогут приблизиться к корню, так как вблизи корней будут слишком сильные возмущения производных полинома всех порядков, так как верхний предел точности метода «Троица» — $(\sqrt[6]{\delta}; \sqrt[3]{\delta})$, а метода «Лагерра» — $\sqrt{\delta}$. Здесь возможно использовать метод Лобачевского, а затем Ньютона, в каждой точке кольца вокруг аппроксимации, полученной с помощью метода

Лобачевского, начиная поиск от самой удаленной точки от начала координат. Либо использовать метод Ньютона на кольце локализации корней, равномерно перемещаясь по нему, пока в какой-нибудь точке метод Ньютона не сойдется к корню. Сходимость данного метода следует из того, что корни производных с ростом их порядка все дальше уходят вглубь кольца локализации корней, что гарантирует сходимость метода Ньютона в точках кольца локализации корней наиболее близких к ним. Напомним, что теорема Ролля гарантирует, что в случае только вещественных корней все корни производных будут внутри круга локализации корней. Но можно ли то же самое сказать о любом вещественном полиноме? На это частично дает ответ радиус локализации корней, полинома с положительными коэффициентами (см. ниже). Сейчас же только отметим, что значение полинома с вещественными коэффициентами в случае комплексно сопряженного аргумента будет комплексно сопряженным: $P_n(\overline{z}) = \overline{P_n(z)}$. В этом легко убедиться, рассматривая комплексный аргумент в виде: $z = |r|e^{i\varphi} = |r|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, откуда $z^k = |r|^k e^{ik\varphi} = |r|^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))$, $k \in Z$. В случае нахождения комплексного корня следует обязательно убедиться, что обратный ему тоже является корнем полинома обратного данному (см. ниже): $P_n(z) = 0 = P^{(-1)}{}_n(1/z)$ — комплексные аргументы могут давать значения полинома, очень близкие к нулевым, но для обратного аргумента это свойство обычно теряется. Тем не менее ни метод «Троица», ни «Лагерра» не стремятся выйти из круга локализации корней, если где-то есть корни, они обязательно отыщут их, другое дело — с какой точностью? Только «Ньютон» может дать точность порядка δ (недостижимую в том числе и для метора QR-факторизации, сопровождающей полином матрицы), но при недостаточном приближении к корням он легко может покинуть кольцо локализации корней, что означает необходимость использовать другое начальное приближение, или медленно сходится к корню, для чего просто заменяем $P_n(x)$ на $P_n(x)/P^{(1)}{}_n(x)$.

Тогда

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_k)}{f_x^{(1)}(x_k)} = \\ = x_{k-1} - \frac{P_n(x_{k-1}) \cdot P_{n-1}^{(1)}(x_{k-1})}{(P_{n-1}^{(1)}(x_{k-1}))^2 - P_n(x_{k-1}) \cdot P_{n-2}^{(2)}(x_{k-1})}. \quad (4.4)$$

Только в связке «Троица» + «Лагерра» + «Ньютон» могут как быстро отыскать корень, так и вычислить его с максимально возможной точностью, — эти методы взаимодополняют, находятся в симбиозе друг с другом.

Осталось определить точку начального приближения построения интерполяционных полиномов. Для этого нам понадобится важнейшая величина, характеризующая полином, как радиус (кольцо) локализации его корней. В простейшем случае, когда какой-либо модуль его корня много меньше или много больше модулей всех остальных корней, его удобно построить с помощью кругов Гершгорина сопровождающей полином матрицы [7]. Круги Гершгорина дают для радиуса локализации корней следующую оценку:

$$R < \left\lceil \begin{array}{c} \dfrac{\sum_{j=1}^{n} |a_j|}{|a_n|}; \\ 1. \end{array} \right. \qquad (4.5.1)$$

Здесь удобно ввести в рассмотрение следующий полином: для данного полинома $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ определим обратный ему полином, определяемый равенством:

$$P_n^{(-1)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot x^j,\ x, a_j \in C,\ j \in \overline{0,n}.$$

Полином обратный к данному получается благодаря замене $x \to \dfrac{1}{\hat{x}}$, поэтому все его корни есть обратные величины к корням полинома $P_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - r_j)$. Для обратного полинома круги Гершгорина дают для радиуса локализации корней следующую оценку:

$$R_{rev} < \left\lceil \begin{array}{c} \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|}{|a_0|}; \\ 1. \end{array} \right. \qquad (4.5.2)$$

Таким образом, круги Гершгорина дают следующее кольцо локализации корней:

$$R_{rev}^{-1} < |r_j| < R,\ j \in \{1,...,n\}. \quad (4.5)$$

Как только корни становятся соизмеримы, кольцо локализации, даваемое кругами Гершгорина, перестает давать сколько-нибудь полезную информацию. Существует более тонкий подход, который дает приемлемое приближение к модулям корней. Вспомнив теорему Руше [12] о том, что для любой функции $f(z)$, представимой в виде $f(z)=\varphi(z)+\theta(z)$ и для которой на некотором контуре Г выполняется то, что $|\varphi(z)|>|\theta(z)|>0$, а сама она аналитична внутри контура Г, то число корней функции $f(z)$ внутри контура Г совпадает с числом корней функции $\varphi(z)$ внутри контура Г. Если $f(z)=P_n(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, $\varphi(z)=a_n x^n$, $\theta(z)=\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$, в качестве контура Г выберем круг $|z|=R$. При возрастании R найдется такое, что для всех $|z|>R: |\varphi(z)|>|\theta(z)|>0$ и, следовательно, все n корней $f(z)$ лежат внутри круга $|z|<R$. Радиус локализации корней, даваемый теоремой Руше, может быть еще более неопределенным, чем радиус локализации корней, даваемый кругами Гершгорина, поэтому в качестве приближения *R* — радиуса локализации корней $f(z)=P_n(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ необходимо брать минимальную величину, при которой $\tilde{\varphi}(R)>\tilde{\theta}(R)$, где $\tilde{\varphi}(z)=|a_n|\cdot z^n$, $\tilde{\theta}(z)=\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|\cdot z^j$, но $|\tilde{\theta}(z)|\geq|\theta(z)|$, так что из теоремы Руше должно следовать, что радиус локализации корней $\tilde{P}_n(z)=\sum_{j=0}^{n}|a_j|\cdot z^j$ больше радиуса локализации корней $P_n(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j\cdot z^j$.

Заметим также, что на произвольном круге радиуса r

$$|z|=r: |\tilde{\theta}(r)|\geq|\tilde{\theta}(r\cdot e^{i\cdot\varkappa})|,\ \varkappa\in[0;2\cdot\pi].$$

Так что если $\tilde{\varphi}(R)>\tilde{\theta}(R)$, то на круге $|z|=R$, будет выполняться

$$|\tilde{\varphi}(R)|\geq|\tilde{\theta}(R\cdot e^{i\cdot\varkappa})|,\ \varkappa\in[0;2\cdot\pi],$$

откуда и следует применимость теоремы Руше! Если заметить, что при домножении полинома $P_n(z)$ на z радиус локализации его корней не

меняется. То отсюда же следует аналог теоремы Ролля для комплексного случая. Так как $P_n^{(1)}(z)=\varphi_z^{(1)}(z)+\theta_z^{(1)}(z)$ и $\tilde{\theta}(r)>\tilde{\theta}_z^{(1)}(r)\cdot\frac{r}{n}$, то радиус локализации корней производной, даваемый теоремой Руше, будет меньше радиуса локализации корней полинома! Но она является практической, а не теоретической оценкой, в отличие от величины R, даваемой кругами Гершгорина, сопровождающей матрицы полинома $P_n(z)$, которую можно использовать в теоретических исследованиях, но которая часто оказывается совершенно бессмысленна на практике.

Пусть $|a_s|=\max\limits_{j,\,j\neq n}|a_j|$, тогда в качестве начальной оценки R будем брать величину:

$$R_0=\left(\frac{|a_n|}{|a_s|}\right)^{1/(s-n)}.$$

Данную величину необходимо изменять (уменьшать/увеличивать в некоторое число раз (которым определяется точность R)), пока при меньших R перестанет выполняться неравенство:

$$|a_n|R_k^n>\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|\cdot R_k^j.$$

Зная кольцо локализации корней полинома, начальное приближение можно задать в любой точке его внешней границы, если рассматривается сам полином или его внутренней границы (для обратного полинома она будет внешней), если рассматривается обратный полином, так как здесь производные имеют наименьшие возмущения.

Тем не менее поиск обычно начинают в точке $z=R$ или $z=-R$, затем круг делится на 4 части и поиск продолжается в точках $z=iR$ или $z=-iR$, затем количество делений увеличивается еще в 2 раза, и поиск продолжается в точках $z=(1+i)R$, $z=-(1+i)R$, $z=(1-i)R$, $z=-(1-i)R$ и т. д.

Если в наличии имеется n параллельно соединенных процессоров, то поиск комплексного корня сильно упрощается. Верхняя часть круга локализации корней полинома делится на n равных частей. Точка дуги каждой из частей круга направляются в качестве начального приближения одному из n процессоров. Если радиус локализации корней выбран достаточно точно, то процессор с начальным приближением,

наиболее близким к корню, должен определить его с помощью метода Троицы Лагерра – Ньютона – Чебышева за минимальное число шагов.

После того, когда корень r найден, полином делится на $(z-r)$ или $(z-r)(z-\overline{r})$, в зависимости от того, вещественный он или комплексный. Если $|r|<<R$, то новый радиус локализации корней можно не искать. Количество итераций для нахождения корня в большей степени зависит от степени его вырожденности:

$$\frac{|r_{min}|}{|r_{max}|}\sim\delta,\ \max_{i,j}|r_i-r_j|\sim\delta$$

и в меньшей степени определяется требуемой точностью вычисления корней.

Если изначально неизвестно, все ли корни полинома вещественны, но есть большая вероятность, что это так, то после определения круга локализации корней полинома можно определить количество его корней с помощью метода Штурма [5, 7] (историческая справка содержится в [24, 25]), рассматривая ряд функций Штурма аналогичных, приведенным в алгоритме Евклида. Определив количество перемен знаков функций Штурма в точках $z=R$ или $z=-R$ и разность в количестве перемен знаков и даст число вещественных корней полинома.

В качестве примера рассмотрим полином:

$$P(x)=x^5-0{,}8x^4+0{,}25x^3-0{,}021x^2-0{,}0015x+0{,}0001.$$

Радиус круга локализации корней полинома $P(x)$ меньше, чем:

$$R=1{,}0720765125.$$

Производная

$$P(x)=P^{(1)}(x)=5x^4-3{,}2x^3+0{,}75x^2-0{,}042x-0{,}0015.$$

$St_1(x)=P(x)$ и $St_2(x)=P^{(1)}(x)$ есть первая и вторая функции Штурма, последующие функции Штурма определяются как взятые с обратным знаком остатки от деления предыдущих функций Штурма: $St_3(x)$ есть взятый с обратным знаком остаток от деления $St_1(x)$ на $St_2(x)$, $St_4(x)$ есть взятый с обратным знаком остаток от деления $St_2(x)$ на $St_3(x)$,...,$St_i(x)$ есть взятый с обратным знаком остаток от деления $St_{i-2}(x)$ на $St_{i-1}(x)$, ... и так до тех пор пока остаток от деления не станет нулевым.

Частное:

$$0{,}2x - 0{,}032;$$

остаток:

$$-0{,}0024x^3 + 0{,}0114x^2 - 0{,}002544x + 0{,}000052;$$

порядок полинома = 4,

$$St_3(x):$$

$$-0{,}000052 + 0{,}002544x - 0{,}0114x^2 + 0{,}0024x^3.$$

Частное:

$$2083{,}33333333333333x + 8562{,}5;$$

остаток:

$$93{,}0625x^2 - 21{,}716666666666666x + 0{,}44375;$$

порядок полинома = 3

$$St_4(x):$$

$$-0{,}44375 + 21{,}716666666666666x - 93{,}0625x^2.$$

Частное:

$$-0{,}0000257891202x + 0{,}00011648028231206;$$

остаток:

$$0{,}000002992613694366102105 68x -$$

$$-0{,}000000311874724022730378720 8;$$

порядок полинома = 2

$$St_5(x):$$

$$0{,}000000311874724022730378720 8726993 -$$

$$-0{,}000002992613694366102105688713726795x.$$

Частное:

$$31097398{,}296077962477694001897014613443 08x -$$

$$-4015945{,}71924797855710191751286;$$

остаток:

$$0{,}80872196288072876717505;$$

порядок полинома = 1

$$St_6(x):$$

$$-0{,}80872196288072876717505 2823.$$

Так как последняя ненулевая $St_{end}(x)$ оказалась числом, то полином не имеет кратных корней.

Вычислим знаки чисел $St_i(R)$:

$$1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1$$

число перемен знаков $V(R)=1$.

Вычислим знаки чисел $St_i(-R)$:

$$-1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1$$

число перемен знаков $V(-R)=4$.

Разность числа перемен знаков $V(R)$ и $V(-R)$ даст количество вещественных корней: 3. Найденные корни полинома подтверждают это:

x10

1)
0,309861098020660214966964226881397046441863182927540682936751931977574897043125354307385735 –
– 0,22280294117412243489531537839286894534513774683325646817073241100130569889661401378468714 5*i

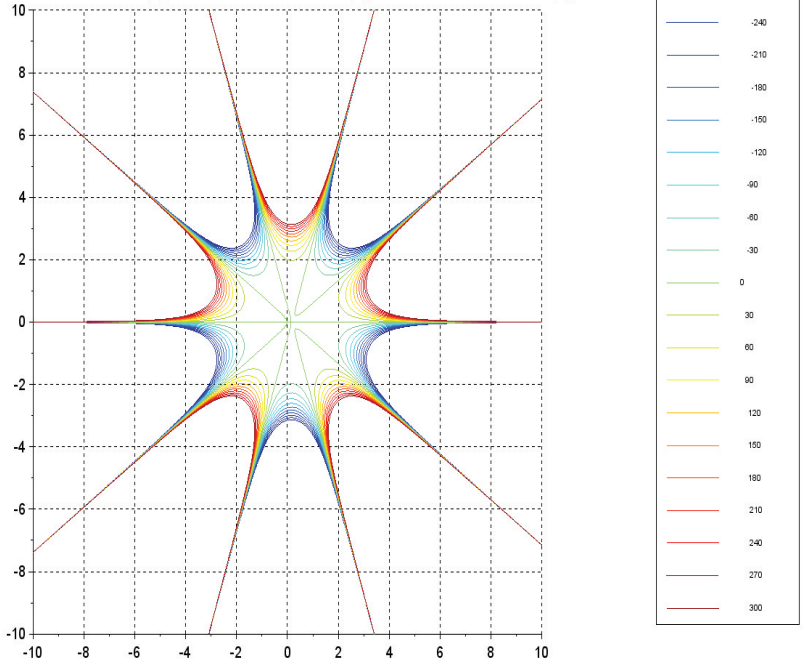
2)
0,2

3)
0,309861098020660214966964226881397046441863182927540682936751931977574897043125354307385352 +
+ 0,22280294117412243489531537839286894534513774683325646817073241100130569889661401378468714 53799*i

4)
– 0,06927497918573135870853614662985967697352171921642708147579951170403403128901942829634006 8

5)
0,04955278314441092877460769286706558408979535336134571560229564774888423720276871968156859749

Некоторые уровни кривых мнимой части функции 1. *(i+j)^ 5 + -0.80000000000000000*(i+j)^ 4 + 0.25000000000000000*(i+j)^ 3 + -0.02100000000000000*(i+j)^ 2 + -0.00150 + 0.00010000000000000



Некоторые уровни кривых вещественной части функции 1. *(i+j)^ 5 + -0.800000000000000000*(i+j)^ 4 + 0.250000000000000000*(i+j)^ 3 + -0.021000000000000000*(i+j)^ 2 + -0.00
)^ 1 + 0.000100000000000000
-300
-270
-240
-210
-180
-150
-120
-90
-60
-30
0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10

Рисунок 4.2

Если все корни вещественны, то в качестве точки начального приближения всегда следует брать $z = R$, а в качестве интерполяционных полиномов в методе Лагерра брать разложение в ряд Маклорена полинома $P_n(z)$ до третьей производной в точке начального приближения, в методе же «Троицы» разложение в ряд Маклорена полинома $P_n(z)$ следует проводить до четвертой производной.

В качестве следующего начального приближения берем ближайший к начальному приближению корень, так мы получим наиболее быструю сходимость к корням. Следует отметить, что в случае полинома $P(x)$ только с вещественными коэффициентами он и любая из его производных при $x \to +\infty$ будут положительной и не меняет своего знака, вне круга локализации корней, вследствие теоремы Ролля (в случае только вещественных корней). Поэтому полиномы только с вещественными корнями не будет иметь точек с отрицательными производными на участке $(r_{max};\ +\infty)$, r_{max} — максимальный корень полинома. Далее заметим, что после того, как найден радиус *R*-локализации корней полинома, то в точке *R* будем иметь случай сходимости метода Ньютона [20]. Если он недостаточно быстро сходится, то исходный полином следует заменить выражением $P(x) / P^{(1)}(x)$ [8]. Чтобы ускорить процесс сходимости Ньютона к корню, можно применить метод Лобачевского, но в этом случае мы должны быть уверены, что оба метода ищут один и тот же корень. Если корень полинома с максимальным модулем отрицателен, то предварительно необходимо сделать замену $x \to x + R$. Но в этом случае метод Лобачевского будет искать корни дольше для достижения той же относительной точности, и степень возведения должна быть не менее 100. В этом случае метод Ньютона на первой стадии найдет корень с относительной точностью не менее 10^{-1}, на второй — не менее 10^{-2}, на третьей — не менее 10^{-4} и т. д.

Для достижения относительной точности 10^{-q} понадобится $\log_2 q$ итераций метода Ньютона. Заметим также, что из разложения Маклорена [20, 24, 25] полинома $P(x)$ в точке R следует, что любой интерполяционный полином $K(x)$, совпадающий с разложением Маклорена $P(x)$ до определенного члена, также будет сходиться к вещественному корню вследствие положительности остальных членов разложения Маклорена. Особенно это важно, когда мы берем на каждой итерации

приближения к корню не более четырех членов разложения Маклорена, так как корни таких полиномов можно найти аналитически [5], и каждый последующий, ближайший, к точке построения $K_i(x)$ корень $K_i(x)$ будет все ближе к максимальному корню $P(x)$.

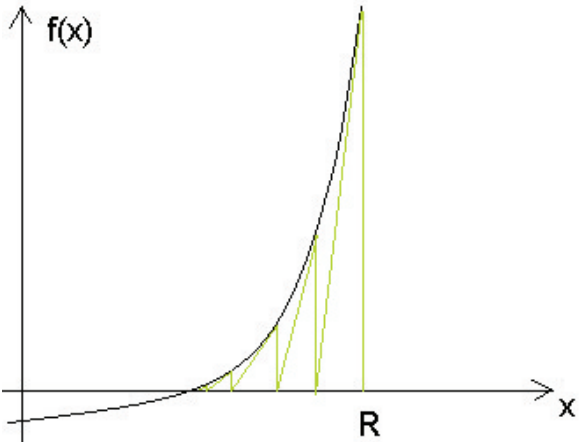


Рисунок 4.3. Метод Ньютона

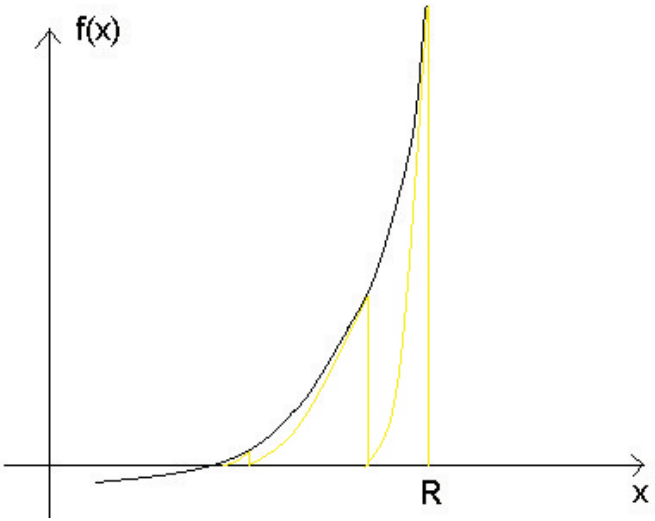


Рисунок 4.4. Интерполяция с помощью рядов Маклорена 2-го порядка

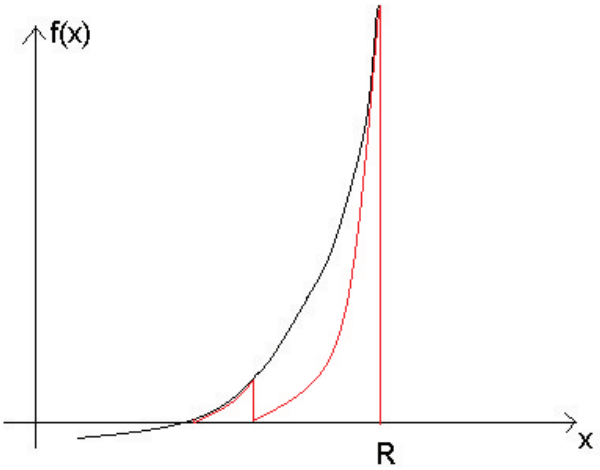


Рисунок 4.5. Интерполяция с помощью рядов Маклорена 3-го порядка

В качестве первого примера вычисления собственных значений приведем матрицу Гильберта – Антипина ($a_{ij} = 999/(999+i+j)$, $i, j \epsilon \{0,..,n-1\}$, $n=9$) 9-го порядка. Здесь нельзя использовать встроенные типы данных, так как $||A^{-1}||$ имеет значение много большее, чем $||\Delta A||$, даваемое встроенными типами данных. В таких плохо обусловленных матрицах особенно остро проявляется отличие количества значащих цифр, необходимых для поиска детерминанта от того, какое Брагман преподнес фон Нейману, — нужно пользоваться зависимостями установленными в [3].

Характеристический полином масштабированной матрицы Гильберта – Антипина:

$$x^9 -$$

$$- 0{,}89287353021693117939498026366274288523335947049690237710776269123050991598473110329380644995600573971141048662165822816643004207875375007771987756898138239687569446301055930029731044251132760130946740502373228225663152277647725037718051643633631928370952035563645507339746173426971754439929719808046352423485096024428908824250189992974553031216492947804151600770463628920018501235085460579000854082938537921157265402855821093695169145620745286803319515149568324173964605659095572646064878732640304623045084909570496543936434087506837664943764 x^8 +$$

+ 0,000005241341526478962742452917295040945196191163455988382
101388326182710292514829131609061195993120764834308795818240
691402678894930286575962014994232596757012734726772263069619
260683174013306682248159705675296176657959368928917955267573
076388524136070508467899962033054850142998455299918598966387
711388592636280035639485657817783865784098861173858815278189
050730701840224401607097505717948006013660104261099675789178
951491455504205070657850200402033227333750027545068727052872
400405517385027728722391678136196990760073214802699593862255
596303195100116739262158433814484144980969097938441042774552
233132924325085870880024667651630991562481723169302179213897
391792123206519983818257004393961294827615245466404794180689
794093015238399048646828049689630319226360643351034642963941
540682089734930761875460055664552254093523587310753216376515
753562521704929812990261125677916459986577832848253282261893
382089600728180248782208103595637028985297789547006871192107
232434725434701569907714887169125359662774521849702454119987
728683438368102482066727404244193803892688590462943386755183
38207661261963252090894154736111074967 6 x^7 –
– 0,000000000000000155757741435877278493735592006288189988589
137952690657765743847600298721047779203818507763523742372122
066554224919014530848969009546295011124555205564657784890032
549380737118875606515644015946945575394907797238853754402032
010077178790156911912355004309505190879610286471275186739161
820958943408993229141256051554058931473635689344757140011371
381482473704376232912767846946459181211583540178399074123876
298951174795489576032658815650171117599901781016269852927855
807740252889529746564424111432105204853963374284896138374838
087263729601048236097008316290619525207839104452666819172818
511528275501472148613214215950614674086254113854146031380554
103802774366092883398529727185426330370880941968541451294538
390681204799869376744279738261695615579813187137129680285568
155547235830082485926964843511284862793066222664314640088152
762812163288573022851572422908967222004705798532053718912375
190118713717778429317171639344245502469856275983128809674256
106120151986906694799877210120417908743329348681365107052070
694869601886793744896440550771444548547636668776138193863024
946840571599756440104829572989529971797 x^6 +

+ 0,000000000000000000000000000000211277999173944997202074512592115351311599229984732454996434273924273140271964486631933156942433519210469457366909282335931501556195539238954796293965085856256869465274631784108145877412563930838049467550702841101689637351298930849900143090581554585812553678283572598026570776306342066060350686957156188184821973138003437599014206448605187633460943468315517265656834084149845502705224766275474586533193602634568140059481586962748063520329456354229439034377793618361833573141960789269482320536522269502084513547931340563577854655507261746805938930012142805786772360179715189273441286799629589207187244718463995628397747773711693683434719980094899026048799823193995588120932649278698551485060569999033215974645541779093978299856970821552845830687671006185533129832288288439057687116204342643955315560418875568936800030994733648413816685657178577038106770805811926217931571901698920426688271787793588383210708633930715007977306414333853033004153617029385584744598146720348614563763970611798461345847507792955528802415238403451129850940210102403291
$$450532373783217339501290357813832537489\ x^5 -$$
– 0,000000000000000000000000000000000000000000000000000011663694999637756988843885190372812865167409990805824604979455402597025040474070258530297768472938265465992332781134600703263503849573173458749198736449633246627078859043217814743517435058059625025378547441285854524395721200935829663520379421877612289286260311312262254974544331135511139487691666680932432656649147157476259327537094483819096649341347507722768045816182788472560906640982131361732137018803703182021262484621116444099005257488952556840332755404010071595246899206035022626530149715013909784635640661992518777002814711900339081631689771788728382462610561172861938931390861453800189537348816753896145788580257498815592521491819603057050752867352491547017230488582290289921514980381403479088605837911590048298899389635248201644110908251656093419130439065792294255397635231021003081721408303666725735658782744642254909741012918297484850173968860606921236445487577379329666689069980019947903340917361790661854744426929824704882490865660794900894918972635496647122748956491455868109698025286161112581668940698718878875
$$67764407261111879614759225386137735215 9\ x^4 +$$

+ 0,000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000022448514696188079079253990340942725819
204034226320393258015831846557770272873327871228979421455001
758723560250792128597834758835542902533237189501309432138829
319825072791020562304587906031913761026030314586667992372841
811722348484108763910595676495672450377371697661359165288515
520340652380189801057813030256174822653662406069475599393953
067582254873291064279782919406470993337724863724137283979747
688278908500094751542905131717378348633487861052380801498341
404778127972429267122635266148989826773011236864959373058878
091322579512667847733964537374300354990907410087604298133427
148792738100170266773631212603380600317250558427378716170193
207524217025513685787624966145527468316975823761648623890214
679008275631737191829148522568909942857992192484144623062253
319829280318393089558907245697108403591981386864984847568076
804117985342575290294285866470854767734313583200220630440158
187620121954468308772297715459812973760746678029150998950789
517501429538418677493612724043257745168499236282130612382041

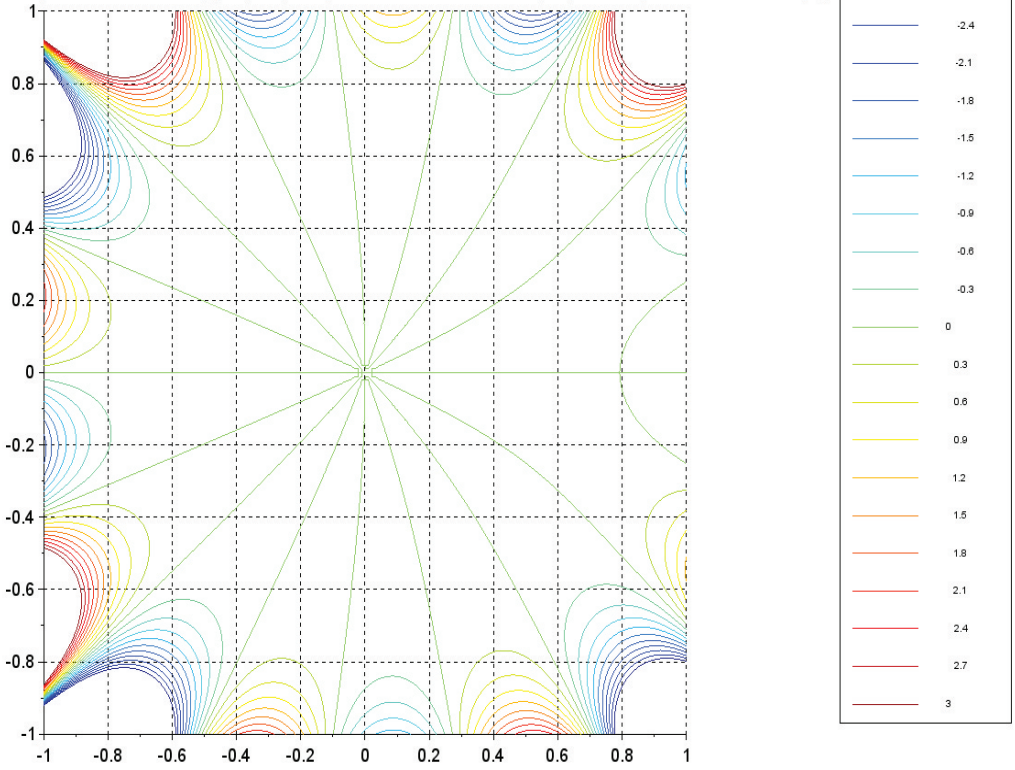
1282079272820433242904605795157421283 51 x^3 –

– 0,000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000120666
122244659202544928156366598704780851318772592920722593341781
989064874630539298838129215696376297086228513716549498576524
159095935781383234944956368317786268740329576404779300149006
259041652682640769982077494900857540367729326636217307659399
158107482235125623581157230177928990346993562607280058213789
070793872665469734832905218236946066921119421763990951216897
285148912416432074787940371584143885730940130782412212111457
545275986576700221234260341743292978380783948713563954583259
324662556240249659571087600761488267758478713152839195288997
263166565022606018643096910392574172913496220947347919643107
816131647210141260317528779107935141326127286493597407534367
857161947444504471398803841896843236165613152633194250313838
025959560304954160370818313573600221478273940992236438929996
308281327501856765633579649455754664910801585645678867409237
534756911932200290646752225537907845331874837895175780237614
484369085201377379734815126949532678002758307288728960101520

470224151636406302656527223771932428405 x^2 +

+ 0,000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000012857328012934146277189906087
736934644402064026973906504958596552582082515779267698530325
508584591578486735890410482328578567091159705770251276484298
907921895647046958650880302172817276574940512514911276029345
132181495081286377906252910829682833656923999845554038026670
042522021255606652426054257382555501438746287125330107095268
531710136971478660187291779671666949354090292091868392724697
424282674557575958038663019381997876395427742693904974307448
528931057844985383924092866026846410494734179236487165074987
912557645810935259090438912483820611878507459276220438615317
991248700002832365233425501364945148794522805691241411626913
525434980217097141128480989290476550380166827655276769537611
527691433703510088802233888618494834899233575087673146963937
918512635525078445961520104175996091202151357317922288507431
363548512663065023329010252580735748630008895515607648423851
811056102134348139193398354922553569473054784759473531958374
104825397866951707287908783133768865364 x –
– 0,000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000014409474174104450997437830563151286168470787
538614447920793493962149938179556052661118343382259442362387
176839064046288716436792041996944673051626045860268970332517
698138065750485732055149126662181704812890808851907826808437
674654071190975639663920475336969625354334208098923581550937
937555476434514139715336888966195042276597285592472371339119
387881507218058761854222014205107273511089726481597800860160
078064097352571784683285620020911140654122455725059771170854
454988188403017926611336037424708090052171927531049229776122
055617971094089399856160632009331305098572006084776704821590
710584414855340283350661116454778362114291195672946178399325
307254645321293454350295363502591709306479587841550376736797
025500911653384887117915878271450849223518642435222451034044
078591947058670343644256975433946429461786568504611827537815
407251961799459551739897930825458020340431892647471055891177
808222389726460131216873525588519559263

Некоторые уровни кривых мнимой части функции характеристического полинома матрицы Гильберта-Антипина 9-го порядк



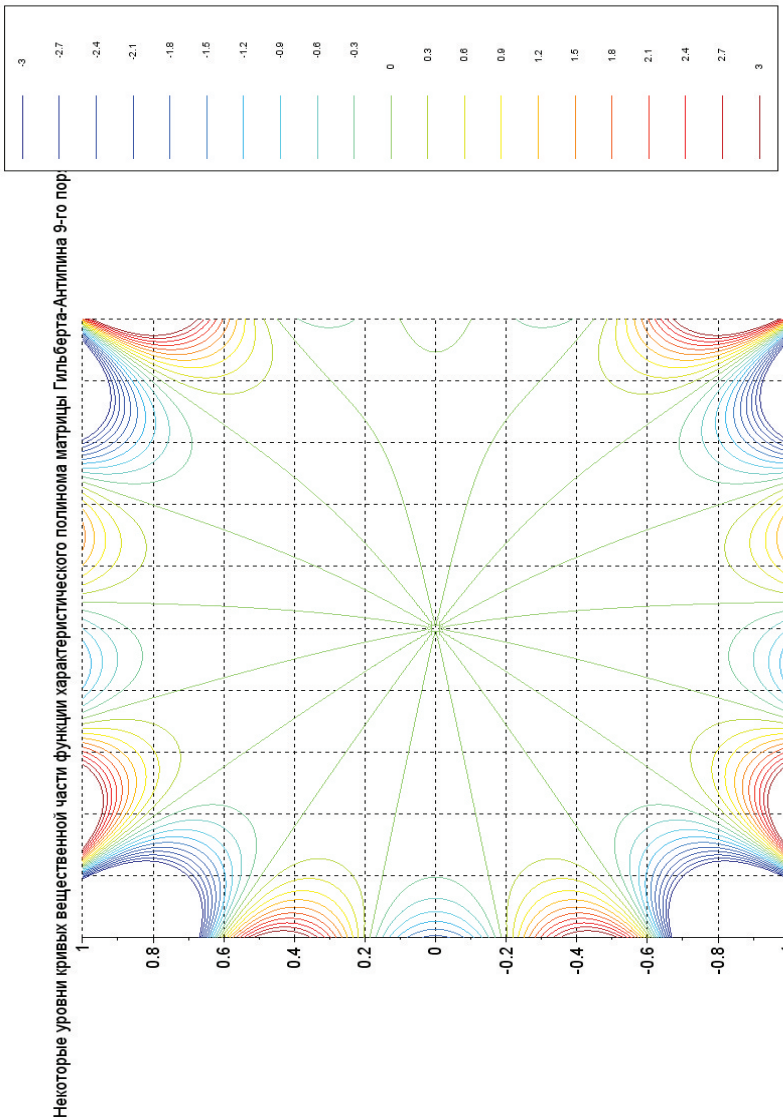

Некоторые уровни кривых вещественной части функции характеристического полинома матрицы Гильберта-Антипина 9-го пор
-3
-2.7
-2.4
-2.1
-1.8
-1.5
-1.2
-0.9
-0.6
-0.3
0
0.3
0.6
0.9
1.2
1.5
1.8
2.1
2.4
2.7
3
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1

Рисунок 4.6.

Корни характеристического уравнения матрицы Гильберта – Антипина:

x10

1)

0,89286765998356826313227582807588765793815094241680804371574936549335440069602898354048626164610977705228752334123410166420429125203688955749217839263745785789472123790542079820626368747953771012448285301562049201640639279935838229142352655327665154348721988306762456818 4

2)

0,00000000002971716652916604770936476943211311346895050439470802450802503062585059782537785807502799170990907427009323286745208490354490259453085588118059440638488605145155607669830327903043624383103760171913491609701006230842557480982547362306815174224095096799401837369 0

3)

0,00000587020364561408765548089597862287624871261988979757952787289394998837205633504636560114481124129234616792234862140137910914093776383446314996657527509784998357897693107607860682355251160123896561053713675072348676820811284065179783328302408759786064285225164084639 1

4)

0,00000000000000001356453308503303307340283615591076882671411552776136505021592579128902016421488780374062354011053275921481020496099764009600641127169850302059014549131466461387130949068672120466255435649502863831661454856471832421547606709711319940998180235818142418172785

5)

0,00000000000000000000055205472652575286012634692716796911142483218107537433740335541843582370185088250603389576472667683250267558689948810932066505941536932145966678928945415262546483525324460994831200214820474994185685726502070417704184262513207818712779351882035599063

6)

0,00000000000000000000000000019246499728447671756244943473691266227047008094589232606849250876679765535489413216999940259547682025146168970827267010674764170403112959239571031680060794795661306111660770466995947592386555275319887072852062028665466914089132508695363807227 6

7)

0,000000000000000000000000000000053752429363069259440829635
140377194255725106219661743959522333662726999609597363509306
850795652994659821157688364753869705108705709112348471724334
035500744514664712709614730354990645861469281201447771750529
775606346106665895938197051379 09

8)

0,000000000000000000000000000000000000010655302198740170077 2
801903851366967877153061404056189631625863019642663612504344
942366686784136024297531262533757037429722518910143488169239
455549153066747271930677624143240946510138240638558034654499
320034520710691827017408080218 71

9)

0,000000000000000000000000000000000000000000001120721919475 52
764677311915410368733855732126043748223971937318764203272354
779967773560170307680542827166773395495110294975956447518176
198573820141872260540387479396912286232430429942687425077045
471034706589628063361127426367 32

В качестве второго примера вычисления собственных значений приведем матрицу Гильберта ($a_{ij} = 1/(1+i+j)$, $i, j \epsilon \{0,..,n-1\}$, $n=9$) 9-го порядка. Здесь использование встроенных типов данных дает большую ошибку при поиске корней характеристического полинома, так как $||A^{-1}||$ имеет значение сопоставимое с $||\Delta A||$, даваемое встроенными типами данных. В таких полуплохо обусловленных матрицах проявляется отличие количества значащих цифр, необходимых для поиска детерминанта, которое Брагман преподнес фон Нейману, и нужно пользоваться зависимостями, установленными в [3], если нам необходимо иметь точные значения собственных значений.

Характеристический полином масштабированной матрицы Гильберта:

$$x^9 -$$

– 0,208062395121218650630415336297689238865709453944748062395
121218650630415336297689238865709453944748062395121218650630
415336297689238865709453944748062395121218650630415336297689
238865709453944748062395121218650630415336297689238865709453
944748062395121218650630415336297689238865709453944748062395
121218650630415336297689238865709453944748062395121218650630

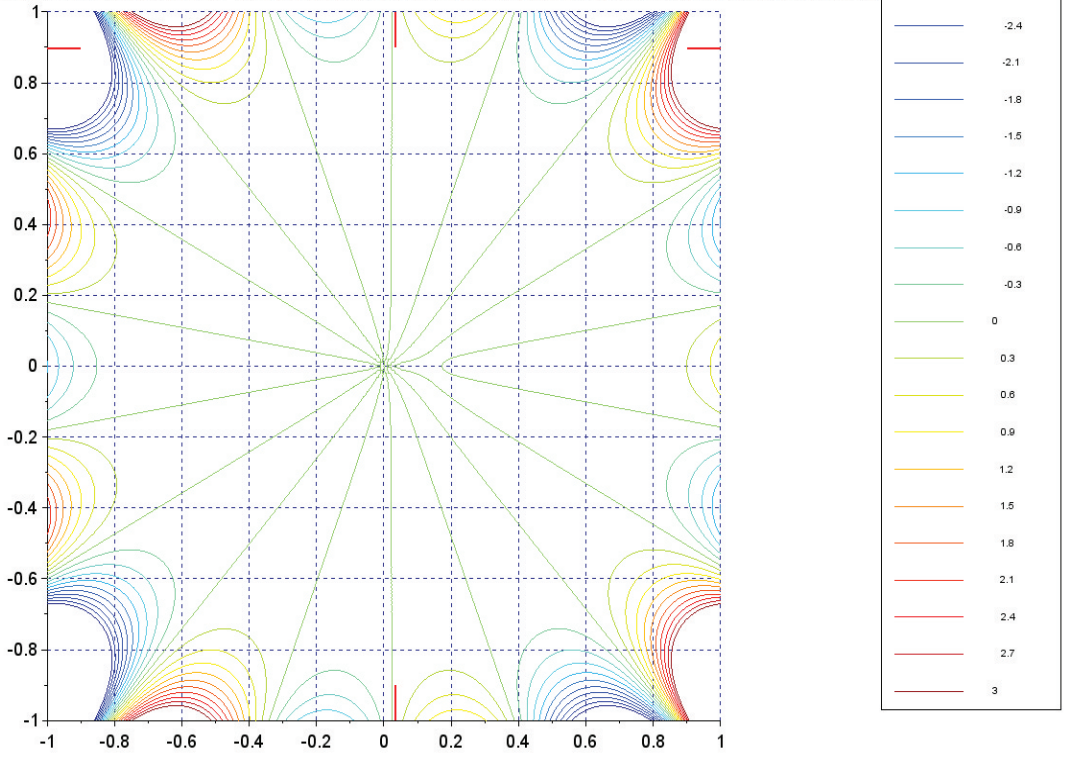
415336297689238865709453944748062395121218650630415336297689
238865709453944748062395121218650630415336297689238865709453
944748062395121218650630415336297689238865709453944748062395
12102 x^8 +
+ 0,006229549315129023410937575204680648256680068005996978984
775501983783897948165053608629640440966369939357735874944156
858321125426569002600813926742899730696247904529818694085799
529375561186887115860103656620864902779067046172489748521559
847488820476616993825275739440006545450121481932807861780849
577366785648699812966918410494442305768234741222537739746021
660185927291370867402678728607701595498112706394620558887664
331240363051688980661968458485666767580931848037291613323424
649353622341418858627140541304808410251986283797609726582714
379204591072618084821567613285699121432015988439956628630699
657711861194652912738748471643028066996255670326697338900821
692539778375511270067694035882709953736965940448732166818002
550897107321075509749580776592980075771793857629590524146948
115136789207816220019702811420897256630151186575154763828834
855847059329851047936883669778226202194390868461895474098956
890674976510709405265829234017908088935101138583930302016137
749032305456273644947715974728178210969929055764788659345083
313271987343014355217838009556095391828286384710352899026970
05397 x^7 –
– 0,0000185102560051496523597331362474791953885768643919066405
153226904384319877399706143870552370625206362377763884829727
559905954420013269736455123976175832892025272553317417026616
400151438022140228506770537648232861592410616295304515657071
673963355190700753710652384886723456726362393603725180721093
381341705925694845348100665691647618293880604478579412218681
522286490227122503419115380063005346294965248919867210149836
096797708094983727923696528000796640729616326927588574514557
104875359529278518861844109505021501597833838501743505312844
546514747124536303964734858612070876777999568215735642927339
966836265896530403113297191049351894889951452277862403532093
167229120752569134100609009294942250723005763324769090093242
912253814358093673397258548642959591335986030768220408493142
143086817301339315120892867916933328493598136961157535202379
095022247229364882800923731822745815137018552491815764338600
82688363355393508231970408153686763950154139500725391943121

91033768586279910901478221523534164486459901939192367063625868656783930397682004029250030959216543350708315807053016032923490516373290786786549521074497630266 x^6 +
+ 0,000000003576321598677450271938101948553154775935803023608326636341566859197317383977512512733302079077523747511808723051954915063659434958219190449088098559612101669505068207664708439677570774365318562394606969296950606717098882630178704395648853202635810710270984557837233882155850827533576250141084967004851917770202284472251459174953382274612507310618274515478577485418151768981420301691851668076315773542917728071485091545481699569267093332498862583765322419277438305553910556419765572265813023939947927416338043028559502756087952523233253561667824434293103494321226223176650915798955038276328096921751719634445668235540930822726024992129688354068033031560302859017617017404496732826583966175168841334976188502865109206365406782837343457264519880925586398304073721793409751879320112457326416856099095227966939159074241827726570595262065155471151206973195757125344565930028884496167185031430377625929694823324900086354490557519468390340438074056393168433462036507396815885369461385378198536202659320883241049533352709163750441874440416059769023856468366234868517874688366705561821917718221534791405532967123731265 x^5 –
– 0,000000000000030836116595593404321722838490991778676079949960094879144603649912560950168402574085926240537177942104428532800988263361360084446719925254361745545146016714834723456808681149117053420254410556130657375563457292087226317291010541076455588584843373889574292950018630372286470719477154718888746112861324884035033118867993759207123730542606819773511474690966830871744353055704435643718959963336978765092247030150859386457993750436825250993866320019384459167299989197981939323734356864646506510142782268696744827973561487329242727267574484442093751656784986130566015663675783513674452271111164394836786779996553783315367584137123999884560471708382912124866272314997463834685562873146616206789255845815465475377422772207007621961647208918608963600318847589064976428045279604482648596828466686515774393711799715894366005485981085365829989277259993812614331370961858016914329564429489131260828461140739737343748882473209728365029044174834544332742203422708701472861364705438733405729868058437308793120212593334996

$$0441164094391567339033492758599688902745258470195851445733705524521545265077686241850535205062098904 x^4 +$$
$$+ 0,000000000000000000008150126945390314821397305297089987983219387657630144938017238951372577007970914092406689383439653209912373544657832755875820859901504848099453830713760142623622043012443647324768706433164653160656017201718430121472873947684393769177887635671330600371803261268505762111098017585006061839226520612612389082571916941613313616985226770736330693148216328843812144289211473099545729193028934194098004622672267452530138917498392177407843238442954521223067519128043299992167005205199924501127617227840096256673666464851974025610864831841399197707389034495889720005191424925380896586392941133942271448331619627446906574116768230212597212064603976522116337119185119790517935802754906438322644107261820352938679503526886173612184715116854929318747962805624970772570267859192314200338637673542161585687486706658067972483586822295814650463958810227870576167881553546677323280665901850286974153899132663294128972748236387179679629145554191831054183209710024709520148195954384723370128387684566689342751105611964617573010481635257349483787703301829489795018317092721750297$$
$$5654140605224416133725614915912458260 21 x^3 –$$
$$– 0,000000000000000000000000000004351810858914041430849552124318023490850025283136011962771832783120592705318025293730120930119043180239026480869164471354612618956459320340348315586250959645654050398083149042181116576194117266584432453496997169788859609066754372749027459133609428702664341582953491917435093961757492931285124991474820286290979587437508756017397384745934066380864770652014110019660423435916654170394357776273542051040476613901387750462629509028764624434177492029887198151064407664786575238394752825979353250518007791630045664619460985207010367817527226618398891250171617962134228095217367728681552572790860407597187965693354506732415379354503523509380798870047054422746989431404119972972593088345175619453715962389867577057417675636415808988279465610859510105698044959694492456611088338843649494242581793078146041691564037654039882717200818634923215014309998959407495391102076135804618025606719799298543447844152661019142953623727790194729038204996347030330673350677531017595780712707215264556195669012325668784533375716847286884133505367693194429730730003965248123556831422547926637446636350703823545343 x^2 +$$

+ 0,000000000000000000000000000000000000027926955292909522367532517888453458746041991199617412606620949675248465170607109632227145465190822940544767043226968722131719630472360710499632227145465190822940544767043226968722131719630472360710495539229660434977051109622589688612378289387872928185936376199053210337176584873674709792170186232132044217517012648650997088004918529694756215079019249207432642003061481871330493948219052025026606538726062948142285795523777101042493595568306142991870411504993081708771802297721848434965713636683710285696470477541696350703697006110684605019693440317855511898210845914100553168741612995209216419647970603889700783519206015305204289935569700743945029117417577215415782722888062383039549901298639801834861352653959679381322569736063395379503909835555309216942202006074796716724478077362633715712650956333491178291493157331012433875209679212531361702016993969313875857904617470558004647226321154681976074826867020841485910292501214793795393148735620873364461358358636549608738413792776625603808435563812960089720453352037948069839516684475289415809341150390986655097078375398689588179033283571151441249681588734267142689281632590461958983755291 x –
– 0,000000000000000000000000000000000000000000000000000000009720234311924999862889472262092770175238283422842907107719579970000149966921715806821480706025894320487150087337296535841512859331106136971907242331078415449108134585359027582295215210140795982653591059982084847371693407139690140507012665210362317778494686492726301167951574246069291565781127493055242990406683072248351322613825528680851672431023665994536143260076113097168463844601199451442546900100550761190856758537581525430821321548531519072817734050752082642672954718830456312796870387375687653712660262819054282454998179524023427389305027745635817656688668244007763456185393723132715780654809856922018501769306284214482447578966870401696684048978059198488765275417667499710422967659417440995754020922617428197788531908168606091673551638543825168001987266449888692278293227270165632853514624119516661769885911461560900004816073947086634741122897847722308423812707744000173974232142938400851455709620652202315602451191888486255388161378196595923281447812867457238938920395009396176090217620629035830157139581966410454989700322592964822821806551420925483250668

Некоторые уровни кривых вещественной части функции характеристического полинома матрицы Гильберта 9-го порядка



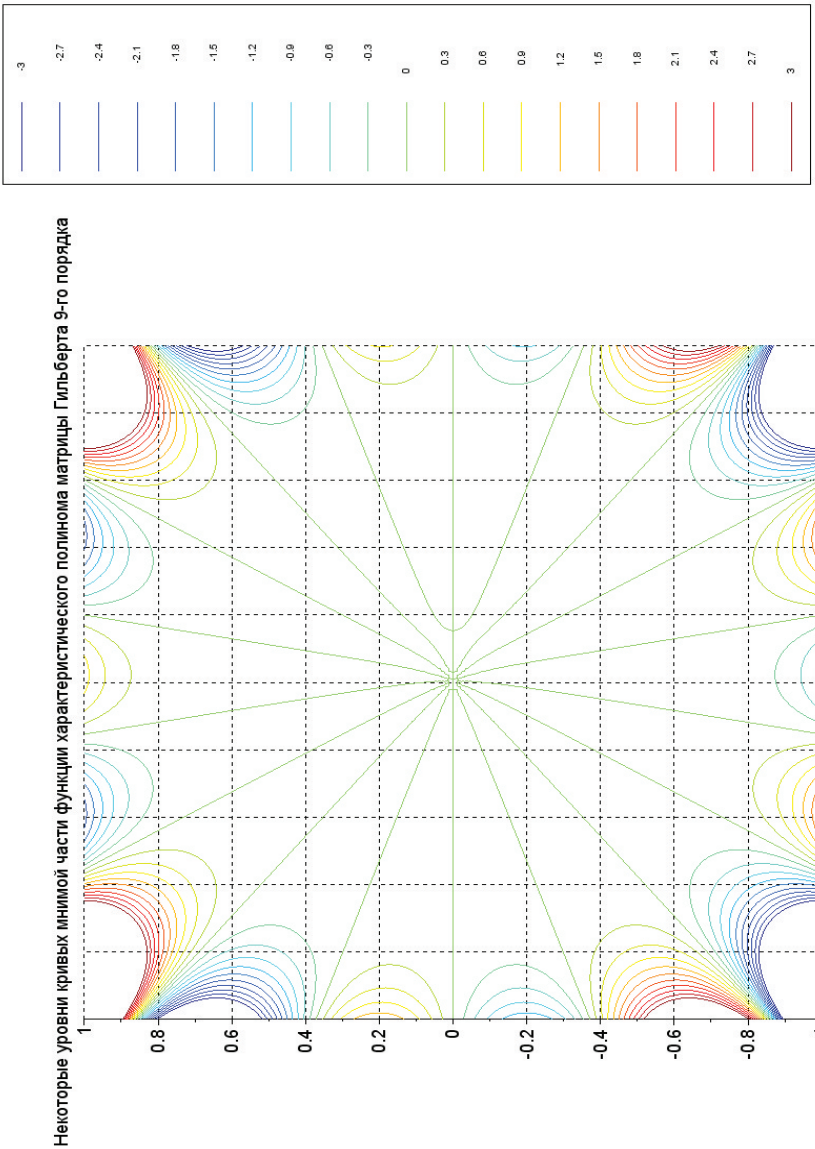

Некоторые уровни кривых мнимой части функции характеристического полинома матрицы Гильберта 9-го порядка
-3
-2.7
-2.4
-2.1
-1.8
-1.5
-1.2
-0.9
-0.6
-0.3
0
0.3
0.6
0.9
1.2
1.5
1.8
2.1
2.4
2.7
3
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1

Рисунок 4.7

Корни характеристического уравнения матрицы Гильберта:
10x

1)
0,172588266090184659877079643173506419152617410389470893592452903312391489140065553503638379576098432796712033363376125233047331699769108307597580127257735775158710275622367002425949684689273873032606770313326468726703174379891718433293281746325508545447627851498518751588

2)
0,032163312229920675132282469636184602294651523227944709476093376253256270115159290934780255841695186361264039390646820466963616366819529981456687354176097090997720731248768997687950911929876460780826033429907322703011684498497824780056821595302073523618440996343507329808

3)
0,003103892578126833134497535560603491178144136877781712920573807834726369479843429085590257413972671633099484165434296172896194944974481669646789871889911964022604299747796777670608485312323959796675190284743403599302332984295503832132449324470341237112919322978839892961

4)
0,000197893386021592399422036185847450976685208690371078640347441891654642389388861527742649375304690526943394626678672993660513309583529979671989214457295550480401505107968020921178520881747207943085837741339354819732639924548944310639121769434917544497564315772609012334

5)
0,000008758085051459756564812799332025599815394036837284100413649805339379384190249338850386473812295721945386752830673958904467987611401039261864848987419274372574191655997792009662440042292829403154699258443849789559929712915534354626781147299308027070946817187228864153

6)
0,000002673013410599413976845435670132068260168507076240730536207578854334292936021854750343587385594966499652563979715338682395082940697424162740865024115602530267176159481767909990323367114096418201403727690966324151652517218930652515363415625807935768146433673961178 59

7)

0,000000005385613348522494181543758161856420018949755714928588341205472210373565311883919942122182401726921914211723334880236563339610289907336749309807955739456636857805015296484937845370133796462320716729620848097396828343161584427208935439096450093279566903471077532315

8)

0,000000000064609054226385823533756370110439345134642869893316621462590423491289305416719501797683601210402490950947069727070372732415117265049132483467433557587803843065176824176974310862324829061888336444256894472570503976825637894319218236002193565516967718900643876971

9)

0,000000000000349967640291149321133704490110399787236174770281456127314197533502085362149302494456908588456412500615665448688997800161337817016877451516134608889172208546297409520977634284769578625684670546811411789723077225830597768181308345254689065000370081110593958304

В качестве третьего примера вычисления собственных значений приведем матрицу Россера 8-го порядка [10]:

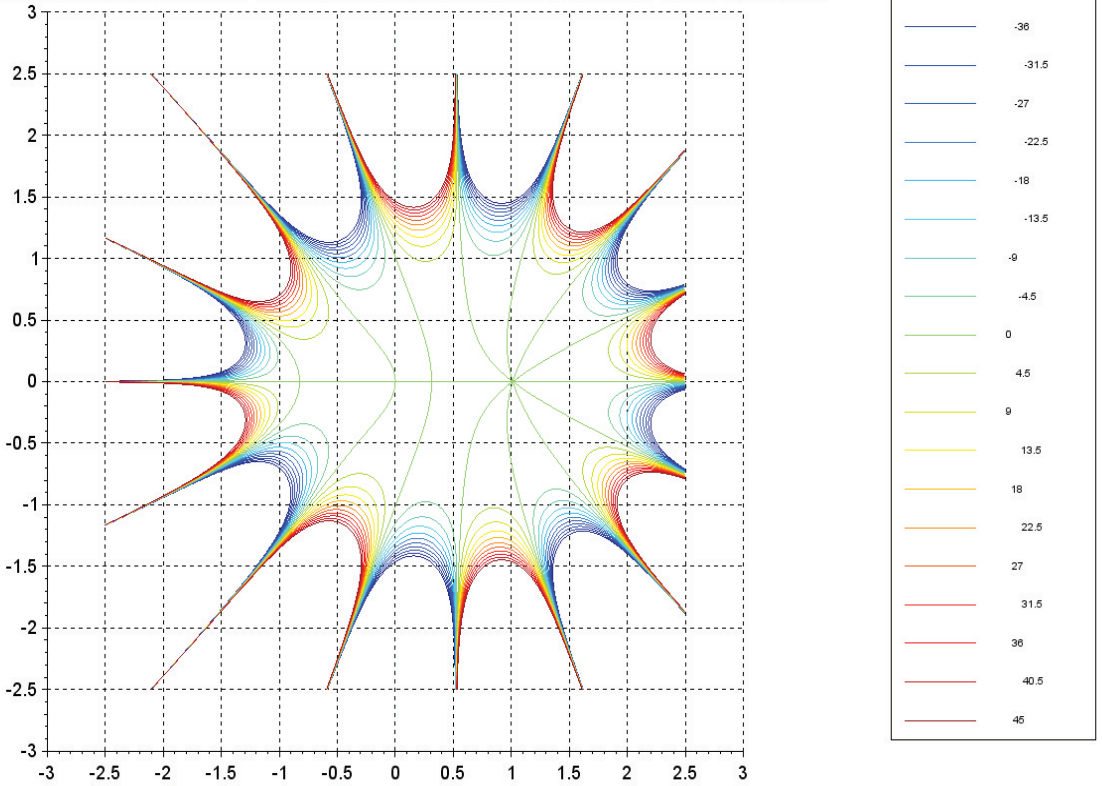
$$A_{8\times 8} = \begin{Vmatrix} 611 & 196 & -192 & 407 & -8 & -52 & -49 & 29 \\ 196 & 899 & 113 & -192 & -71 & -43 & -8 & -44 \\ -192 & 113 & 899 & 196 & 61 & 49 & 8 & 52 \\ 407 & -192 & 196 & 611 & 8 & 44 & 59 & -23 \\ -8 & -71 & 61 & 8 & 411 & -599 & 208 & 208 \\ -52 & -43 & 49 & 44 & -599 & 411 & 208 & 208 \\ -49 & -8 & 8 & 59 & 208 & 208 & 99 & -911 \\ 29 & -44 & 52 & -23 & 208 & 208 & -911 & 99 \end{Vmatrix}.$$

Она вырождена и интересна тем, что встроенные типы данных не дают нулевого значения ее детерминанта: $||A^{-1}A|| \neq 1$.

Характеристический полином масштабированной матрицы Россера:

$$x^8 - 4{,}04x^7 + 5{,}08x^6 + 0{,}082518x^5 - 5{,}32767625x^4 + 4{,}287904631x^3 - -1{,}082852512x^2 + 0{,}000106131x.$$

Некоторые уровни кривых мнимой части характеристического полинома матрицы Россера 8-го порядка



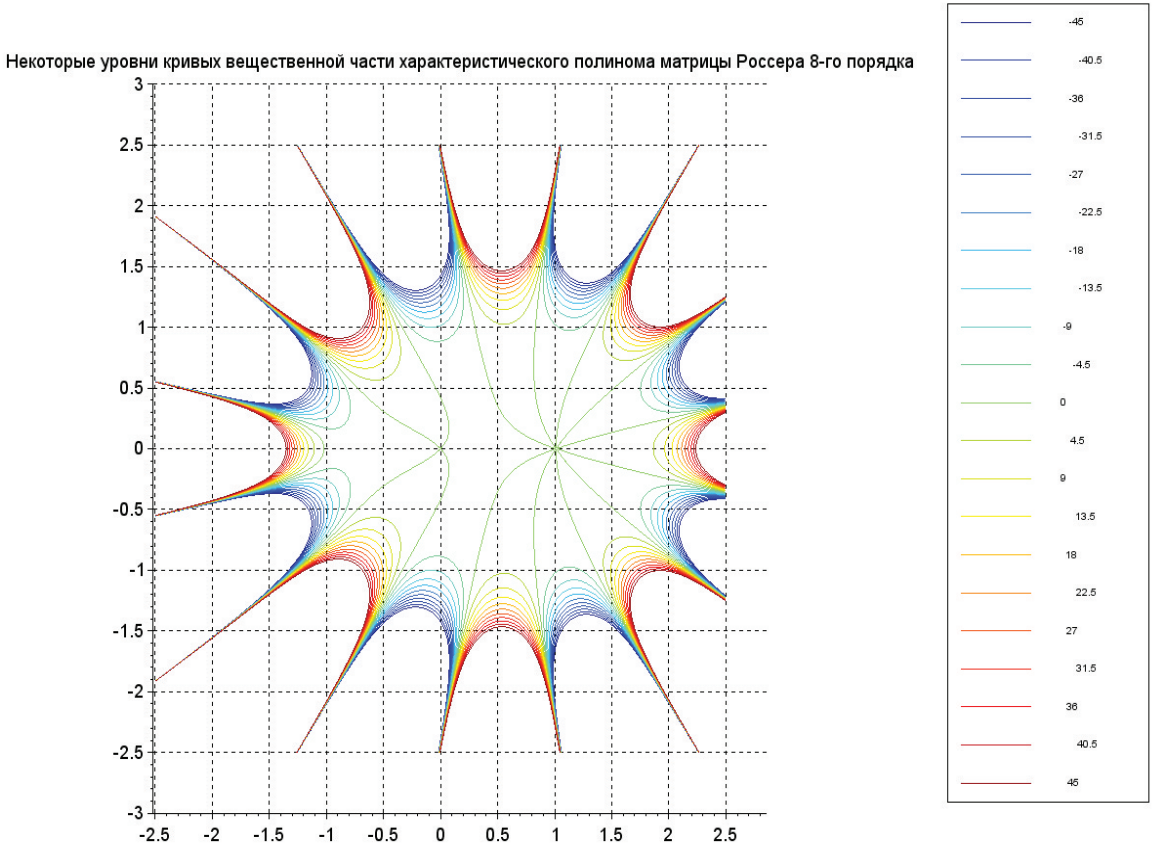

Некоторые уровни кривых вещественной части характеристического полинома матрицы Россера 8-го порядка
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
-45
-40.5
-36
-31.5
-27
-22.5
-18
-13.5
-9
-4.5
0
4.5
9
13.5
18
22.5
27
31.5
36
40.5
45

Рисунок 4.8

Корни характеристического полинома матрицы Россера:

1000x

1)

1,020049018429996823846313791305508706072223989252593745755502659507482587066395424179540064104944893179529547112857171749861664541727077554912373426255885949178309285427544728675356218573635234384159688949571642996205598758999394189564618801285601324252738737458342239543

2)

1,019901951359278483002822410902278198956377094609959640758497080442593363206222419558834885109393200836119025824103991066143177934112153629980277262611993681335200823392408158651518060943692502874470308846869711270286668767037080025383069160109802967964998133727559007017

3) 1,02

4) 0

5)

– 1,020049018429996823846313791305508706072223989252593745755502659507482587066395424179540064104944893179529547112857171749861664541727077554912373426255885949178309285427544728675356218573635234384159688949571642996205598758999394189564618801285601324252738737454813132436

6) 1

7) 1

8)

0,000098048640721516997177589097721801043622905390040359241502919557406636793777580441165114890606799163880974175896008933856822065887846370019722737388006318664799176607591841348481939056307497125529691153130288729713331232962919974616930839890197032035001866274217987914

Линии уровней нулевых значений мнимой и действительной части характеристического полинома образуют $2n$ лучей, где n — порядок характеристического полинома, но я никогда не встречал доказательство этому.

Дополнение.
Некоторые интересные вопросы, на которые пока не нашлось достойных ответов

1. Пусть имеются квадратные матрицы, элементы которых равны 0 или 1. При каких порядках матриц среди них найдутся симметричные, детерминант которых по модулю равен максимальному определителю матриц из 0 и 1 данного порядка?

2. Можно ли понизить оценку $\max|\det_{n\times n}\{0;1\}|<=\prod_{i=2}^{n}[2i/3]$, здесь $[n]$ возвращает наименьшее целое большее n, до оценки $\max|\det_{n\times n}\{0;1\}|<=([n/2])^2$?

3. Отвечая на проблему о комбинациях матриц, не имеющих суммарной обратной, показанную в [1], были предложены конструкции типа «Алёнушка» и «Ната». Можно ли матричную конструкцию типа «Алёнушка» или «Ната», состоящих из трех матриц, заменить одной матрицей, не обязательно квадратной и с произвольным набором элементов? Это очевидно нельзя сделать, если в каждой из трех матриц используются разные алфавиты. Однако какой будет ответ, когда алфавит одинаков?

«Алёнушка»

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}1_{n\times n} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{A}2_{n\times n} \end{Vmatrix}$$
$$\begin{Vmatrix} \quad \mathbf{A}3_{2n\times 2n} \quad \end{Vmatrix}$$

«Ната»

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{H}1_{n\times n} \end{Vmatrix}$$
$$\begin{Vmatrix} \mathbf{H}2_{n\times n} \end{Vmatrix}$$
$$\begin{Vmatrix} \mathbf{H}3_{n\times n} \end{Vmatrix}$$

4. Можно ли найти выражение для стохастического момента 4-го порядка модуля определителя квадратных матриц из $\{-1;\ 0;\ 1\}$ через известные ныне функции? Такое выражение было численно найдено для матриц порядка, не превышающего 8 с элементами $\{-m;-m+1;...;-1;0;1;...;m-1;m\}$, $m\in N$ и $\{0;\ 1;\ ...;m-1;m\}$, $m\in N$ (расчеты требуют применения суперЭВМ).

5. Существует ли аналитическое (нечисленное) доказательство формулы (VII.3.5.1) из 2-го издания «Начальных стохастических

моментов матриц»? Численно оно проверено для всех матриц порядка, не превышающего 10 (смотри [3] и приложение 4).

6. Где найти параметры алгоритма QR-разложения матриц, предложенный В. Кублановской и Фрэнсисом [27] в 1961 году, такие как скорость его сходимости к корню, в зависимости от требуемой точности определения собственных значений или степени вырожденности матрицы? Алгоритм и доказательство его сходимости для нормальных матриц сформулированы в [27], теорема о сходимости для произвольной вещественной матрицы без доказательства и без ссылок на то, где его найти, приведена в [4], некоторые аспекты доказательства для произвольных матриц приводятся в [22], там же имеются ссылки на Fortran-код QR-алгоритма. В [7] представлен процесс ортогонализации матриц по Граму.

Если нам требуется вычислить собственные значения с произвольной точностью, то какой алгоритм быстрее: Троица Лагерра – Ньютон – Чебышев (аналог алгоритма Дженкинса –Трауба или Лагерра. Алгоритм Лагерра, приведенный в [8], расходится при наличии кратных корней, отделить которые можно с помощью метода Евклида [5]), в случае произвольной точности и порядка, в сочетании с методом Крылова поиска характеристического уравнения матрицы или QR-разложение? Доказательство сходимости алгоритма Дженкинса – Трауба в случае вещественных полиномов содержится в:

• "Algorithm 493: Zeros of a Real Polynomial" // ACM TOMS. Vol. 1. Iss. 2 (June 1975). P. 178–189;

• Jenkins M. A. and Traub J. F. (1970) A Three-Stage Algorithm for Real Polynomials Using Quadratic Iteration // SIAM J. Numer. Anal., 7(1970). P. 545–566;

• Jenkins M. A. and Traub J. F. (1970) Principles for Testing Polynomial Zerofinding Programs // ACM TOMS 1, 1 (March 1975). P. 26–34.

Вопрос возникает при решении ОДУ с плохо обусловленной матрицей (матрицы Россера, Гильберта, Гильберта – Антипина и др.).

7. В [3] было найдено, что в арифметике, основанной на полиномах Лагранжа (метод Тоома – Кука или Карацубы ускорения умножения больших чисел), оптимальной системой счисления является $n!$. При решении необыкновенных ДУ [22] применение находят полиномы Эрмита — является ли $n!$ оптимальной системой счисления в случае применения этих полиномов?

8*. Рассмотрим вопрос скорее теоретический, нежели практический: насколько достоверна точка зрения, указанная в [26], что

алгоритмы Тоома – Кука или Карацубы, его расширенная версия [3], использующая оптимизированную систему счисления n!, основанную на применении полиномов Лагранжа, лишь теоретически достигает точности $O((\ln N)^{\ln(2D-1)/\ln D})$, N — количество разрядов каждого числа, D — количество разбиений), а венцом в понижении сложности умножения больших чисел являются методы, основанные на дискретном преобразовании Фурье? Сложность таких алгоритмов оценивается в $O(N \ln N)$, в весьма специфических системах счисления. При каких разрядах чисел (их количество) начинает работать каждая из оценок? Насколько меняется ответ в разных системах счисления? Какие из них отвечают как требованиям удобства, так и простоты реализации? Что важнее: скорость или возможность быстро разобраться в архитектуре вычислений? Насколько меняются ответы в различных счисления — $10^k, 2^k, n!$, те, которые фигурируют в книге [26]? Теоретические приложения таких чисел, приводятся в [26].

Следует иметь в виду, что при разбиении чисел на части и последующего умножения этих частей эффект от полиномиальной арифметики будет тем лучше, чем больше эти числа. Если каждая часть числа представляет собой единицу встроенного типа данных, то эффект будет отрицательным, так как современные процессоры выполняют операции умножения и сложения двух чисел за примерно одинаковое время [15, 17] (встроенные типы данных уже давно выполняют операцию умножения за столь заветные $O(n \ln n)$ операций!), так что этот шаг умножения частей числа нужно производить «школьным» методом в столбик. Для предыдущих частей разбиений полиномиальная арифметика вполне работает, скепсис Крэндалла можно отнести именно к последнему разбиению — здесь ни в коем случае нельзя применять полиномиальную арифметику.

Таким образом, полиномиальную арифметику на 64-разрядных машинах можно применять для чисел, имеющих не менее 49 разрядов. Если используется двоичная система счисления, то каждый разряд ограничивается величиной $2^{31} = 2147483648$. Если используется десятичная система счисления, то ограничение дается величиной 10^9. Если использовать факториальную систему счисления, то каждый разряд ограничивается величиной $12! = 479001600$. В своей книге Крэндалл утверждает, что арифметика, отличная от школьной, должна применяться к числам, состоящим из сотен тысяч или миллионов цифр.

Я предполагаю, что данное использование можно начинать для чисел из 4 сотен десятичных цифр. Где можно использовать такие числа? В плохо обусловленных матрицах невысоких порядков (менее 1000), например. Если порядок матрицы превышает 1000, то оперирование с числами, состоящими из более чем 400 десятичных разрядов, будет занимать целые дни, при увеличении порядка в 2 раза дни перерастут в недели и т. д.

9**. В силу крайней сложности вопроса 8* данный вопрос еще более далек от практических результатов. Как изменятся ответы на вопрос 8*, если вычисления проводить не с абсолютной, а с относительной точностью (см. архитектуру чисел с плавающей точкой [17], и ее продолжение на многоразрядные числа, — Дополнение 1)?

Дополнение 1. Аспекты класса floatEXT

В классе floatEXT сочетаются скорость встроенного типа данных long double и точность класса BIPS. Во floatEXT вычисления проводятся с постоянной относительной точностью в отличие от класса BIPS, где постоянна абсолютная точность. Некоторые детали встроенного типа данных long double рассмотрены в одном из стандартов IEEE [15, 17]. Поверхностное знакомство с вычислениями с абсолютной точностью дает книга [9].

floatEXT — числа представляются в виде массивов, информация о которых хранится в классе (знак числа, показатель экспоненты, размер массива, информация, оптимизирующая вычисления для данного порядка мантиссы, и другие часто используемые константы).

$$\square_0.\square_1\square_2\square_3\square_4\square_5\square_6...\square_{2\times mantissa-1}\square_{2\times mantissa} \times b^{k\,j},$$

где b^k — основание системы счисления.

Элемент с индексом 0 всегда нулевой, но в процессе вычислений может меняться. Элемент с индексом 1 всегда ненулевой, только если floatEXT — число тождественно не равно 0. В процессе вычислений сначала оценивается мантисса результата, затем значащая часть и окончательный результат. Архитектура арифметики floatEXT-чисел глубоко взаимозависима и многоуровнева: нельзя проектировать функцию сложения двух чисел, не зная, как будет вычислен квадратный корень из числа, но при этом при проектировании элементарных функций ($\cos$, $\arccos$, e^x, $\ln x$ и др.) не должно задумываться, как спроектированы арифметические операции ($+$, $-$, $*$, $/$, $\sqrt{}$ и др.).

Дополнение 2. Преобразование многоразрядных чисел из одной системы счисления в другую

В эпоху 16-разрядных операционных систем для преобразования чисел из двоичной системы в десятичную не надо было сильно размышлять много или мало разрядов в вашем числе: размер оперативной памяти был столь мал, что числа физически не могли превышать несколько десятков машинных слов, и преобразование из двоичной системы счисления в десятичную проще всего делать, вычисляя остаток от деления на 2 [17]. Но с приходом 64-разрядных операционных систем, созданием высокоуровневых языков программирования, средств разработки и компиляции [9], разработкой высокоэффективных алгоритмов для работы с многоразрядными числами [2, 3, 26], наконец, оперативной памятью, измеряемой в ГБ, интерес к многоразрядным числам возрос, а значит, возникает задача эффективного их представления в различных системах счисления. Идея заключается в следующем: каждое десятичное число можно представить в виде: $0,d_1^{(0)}d_2^{(0)}...d_n^{(0)}10^{9k}$, где каждое из $d_i^{(0)}<10^9$, $i=\{1,2,...,n\}$, $k \epsilon Z$, $d_1^{(0)}>0$, если все число тождественно не равно 0. Чтобы перевести последовательность $d_i^{(0)}$ в двоичную систему счисления необходимо последовательно над каждым числом $d_i^{(0)}$, начиная с первого, выполнять операцию двоичного сдвига и переноса на 29 бит ($2^{29}<10^9$). В результате получим в качестве частного новую последовательность $0^{(1)},d_1^{(1)}d_2^{(1)}...$ в качестве частного и остаток от деления $0,d_1^{(0)}d_2^{(0)}...$ и 2^{29}, который будет первым разрядом с конца в двоичной записи числа.

Указанную процедуру надо проделать с новой последовательностью $0,d_1^{(1)}d_2^{(1)}...$, получив следующий разряд двоичной записи числа. Эту процедуру надо проделывать до тех пор, пока $0,d_1^{(p)}d_2^{(p)}...$ не станет меньше 2^{29}. Для преобразования экспоненты $10^{9k}=2^{31(9k\log_2 10)/31}$ отделяем целую и дробную часть числа $(9k/31)\log_2 10$. Найдем новую экспоненту и число, на которое нужно домножить последовательность $0,d_1^{(0)}d_2^{(0)}...$ для его последующего перевода в двоичную систему счисления. Полученное число с основанием 2^{29} полезно преобразовать в систему счисления 2^{31}.

Для перевода многоразрядного двоичного числа в десятичную систему счисления действуем по следующей схеме: сначала преобразовывается экспонента: $2^{31k'} = 10^{9(31k\log_{10}2)/9}$. Затем, отделяя целую и дробную часть числа $(31k'log_{10}2)/9$, получаем новую экспоненту и число, на которое нужно домножить мантиссу начальной двоичной последовательности $0,b_1{}^{(0)}b_2{}^{(0)}...b_n{}^{(0)}2^{31k'}$. Полученная мантисса числа $0^{(1)},b_1{}^{(1)}b_2{}^{(1)}...b_n{}^{(1)}$ в десятичной системе счисления запишется в виде:

$$b_1{}^{(1)}2^{31(n-1)} + b_2{}^{(1)}2^{31(n-2)} + ... + b_n{}^{(1)}.$$

Но следует иметь в виду, что для многоразрядных чисел эффективность представления в двоичной системе счисления резко снижается в сравнении со встроенными типами данных и в первую очередь зависит от того, насколько эффективней операция $\mathrm{mod}\ 10^9$ перед операцией умножения двух чисел. Многие вычислительные архитектуры демонстрируют, что это около 3–5 раз и целиком зависит от вашей вычислительной архитектуры и электронных компонент компьютера.

Все сказанное выше справедливо к системам счисления, основание которых менее 10^9 (например, факториальным).

Дополнение 3. Четвертый стохастический момент модуля детерминанта матрицы из вещественных чисел

3.1. Элементы матрицы в среднем равны 0

Запишем выражение для $(\det||A_{n\times n}||)^4$ в виде:

$$(\det||A_{n\times n}||)^4 = (\sum_{l=1}^{n!}(\prod_{k=1}^{n}a_{kj_k})_l^2)^2 +$$

$$+4\cdot(\sum_{l=1}^{0,5\cdot n!\cdot(n!-1)}((-1)^{t(\vec{j1})}\cdot(-1)^{t(\vec{j2})}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{kj1_k}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{kj2_k})_l)^2 +$$

$$+4\cdot\sum_{l=1}^{n!}(\prod_{k=1}^{n}a_{kj_k})_l^2\cdot\sum_{p=1}^{0,5\cdot n!\cdot(n!-1)}((-1)^{t(\vec{j1})}\cdot(-1)^{t(\vec{j2})}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{kj1_k}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{kj2_k})_p$$

и введем обозначения:

$$(\mathrm{I}):\ (\sum_{l=1}^{n!}(\prod_{k=1}^{n}a_{kj_k})_l^2)^2;$$

$$(\mathrm{II}):\ 4\cdot(\sum_{l=1}^{0,5\cdot n!\cdot(n!-1)}((-1)^{t(\vec{j1})}\cdot(-1)^{t(\vec{j2})}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{kj1_k}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{kj2_k})_l)^2;$$

$$(\mathrm{III}):\ 4\cdot\sum_{l=1}^{n!}(\prod_{k=1}^{n}a_{kj_k})_l^2\cdot\sum_{p=1}^{0,5\cdot n!\cdot(n!-1)}((-1)^{t(\vec{j1})}\cdot(-1)^{t(\vec{j2})}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{kj1_k}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{kj2_k})_p.$$

Выражение для $(\det||A_{n\times n}||)^4$ имеет $(n!)^4$ членов, при поиске его среднего значения, при условии (*) независимости и равенства нулю средних значений $a_{ij}, i, j\in\{1,...,n\}$ — выражение (III) обращается в 0.

Выражение (II) содержит $(n!(n!-1))^2$ членов, среди них $(3n!^2-2n!)$ — квадрат этого выражения, а остальные $(n!(n!-1))^2-(3n!^2-2n!)$ — не являются квадратами, но могут их содержать при раскрытии в одно произведение всех четырех произведений каждого из члена (II).

Сумму таких членов обозначим через $\sum_{k=4}^{n}carry_{newn-k}{}^{n}$, (верхний индекс не является степенью!). Для $n=4$ это, например, будут: $(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})(a_{11}a_{23}a_{32}a_{44})(a_{14}a_{22}a_{41}a_{33})(a_{14}a_{23}a_{32}a_{41})$. Рассчитать коэффициенты $carry_{newn-k}{}^{n}$ к настоящему моменту можно только численно, из соответствующей системы уравнений или программы для ЭВМ. Коэффициенты для квадратов в выражении (I), и они же двойные без первого члена в (II) находятся итерационно из формулы для второго стохастического момента определителя матрицы, получаемого по формуле (идею получения этой формулы можно усмотреть из доказательства к Приложению VII.2.1 в [3]):

$$\tilde{\det}A_{n\times n}=\sum_{l=1}^{n!}(\prod_{k=1}^{n}a_{kj_k})_l$$

второй стохастический момент этой функции запишется в виде:

$$\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{2\times2}\{U(\vec{m})\}|)=2M^2(U^2(\vec{m}))+2M^4(U(\vec{m}));$$

$$\hat{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{2\times2}\{U(\vec{m})\}|)=M(U^2(\vec{m}))+M^2(U(\vec{m}));$$

$$\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{n\times n}\{U(\vec{m})\}|)=n\cdot M(U^2(\vec{m}))\cdot\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{n-1\times n-1}\{U(\vec{m})\}|)+$$

$$+n\cdot(n-1)^2\cdot M^4(U(\vec{m}))\cdot\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{n-2\times n-2}\{U(\vec{m})\}|)+$$

$$+\ldots+n\cdot\prod_{k=1}^{t}(n-k)^2\cdot M^{2+2t}(U(\vec{m}))\cdot\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{n-t-1\times n-t-1}\{U(\vec{m})\}|)+$$

$$+\ldots+M^{2n}(U(\vec{m}))\cdot n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(n-k)^2\cdot(\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{2\times2}\{U(\vec{m})\}|)+\hat{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{2\times2}\{U(\vec{m})\}|)) \quad \text{(B.0)}$$

Тройные коэффициенты выражения (I) без двух нулевых в сумме с $carry_{new\,n-k}{}^{n}$ дадут выражение для вычисления среднего 4-го стохастического момента модуля детерминанта при условии (*), накладываемого на его элементы:

$$\mu_4(|\det||A_{n\times n}\{U(\vec{m})\}||)=\sum_{k=0}^{n}\gamma_{n\,n-k}\cdot M^{n-k}(U^4(\vec{m}))\cdot M^{2k}(U^2(\vec{m})) \quad \text{(B.1)}$$

Вычислим коэффициенты выражения (I) с помощью (B.1) для n=3:

$$\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{3\times3}\{U(\vec{m})\}|)=$$

$$=3M(U^2(\vec{m}))\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{2\times2}\{U(\vec{m})\}|)+12\hat{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{2\times2}\{U(\vec{m})\}|)=$$

$$=6M^3(U^2(\vec{m}))+18M(U^2(\vec{m}))\cdot M^4(U(\vec{m}))+12M^6(U(\vec{m}))$$

Для n=4 потребуются коэффициенты для $\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{3\times3}\{U(\vec{m})\}|)$, $\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{2\times2}\{U(\vec{m})\}|)$, $\hat{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{2\times2}\{U(\vec{m})\}|)$. Для n=5 в дополнение к предыдущему понадобятся также коэффициенты для $\tilde{\mu}_2(|\tilde{\det}A_{4\times4}\{U(\vec{m})\}|)$ и т. д. (полученные коэффициенты занесены в таблицу).

Для коэффициентов $\gamma_{n\,n-k}$ была эмпирически (благодаря вычислениям на ЭВМ это удалось проверить для всех матриц от второго до восьмого порядка) замечена зависимость:

$$\frac{\gamma_{n+1\;n+1-k}}{(n+1)!^2}=\frac{\gamma_{n\,n-k}}{n!^2\cdot(n+1-k)},k\in\overline{0,n}. \quad \text{(B.2.1)}$$

Также эмпирически было отмечено:

$$\frac{\gamma_{n\,0}-carry_{new\,0}^{n}}{n!}-\frac{\gamma_{n\,1}-carry_{new\,1}^{n}}{n!}=(-1)^n\cdot3, \quad \text{(B.2.2.1)}$$

откуда для $\gamma_{n0} - carry^{n}_{new\,0}$ получаем зависимость:

$$\gamma_{n0} - carry^{n}_{new\,0} = (1{,}5 - 3\cdot(\sum_{i=1}^{[n/2]-sign(-1)^n}\frac{1}{(2i+1)!} - \sum_{i=2}^{[n/2]}\frac{1}{(2i)!}))\cdot n!^2, \quad \text{(B.2.2.2)}$$

$$sign(1) = 1,\ sign(-1) = 0$$

где [*z*] — наименьшее целое, большее *z*.

Таблица 3.1.1

n	2	2	2
k	2	1	0
$carry_{new\ n-k^n}$	0	0	0
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	6	0	2
$\gamma_{n\ n-k}$	6	0	2

Таблица 3.1.2

n	3	3	3	3
k	3	2	1	0
$carry_{new\ n-k^n}$	0	0	0	0
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	36	54	0	6
$\gamma_{n\ n-k}$	36	54	0	6

Таблица 3.1.3

n	4	4	4	4	4
k	4	3	2	1	0
$carry_{new\ n-k^n}$	432	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	18	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	3/4	0	0	0	0
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	648	576	432	0	24
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	27	24	18	0	1
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	9/8	1	3/4	0	1/24
$\gamma_{n\ n-k}$	1080	576	432	0	24
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	45	24	18	0	1
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	15/8	1	3/4	0	1/24

Таблица 3.1.4

n	5	5	5	5	5	5
k	5	4	3	2	1	0
$carry_{new\ n-k^n}$	14400	10800	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	120	90	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	1	3/4	0	0	0	0
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	15840	16200	7200	3600	0	120
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	132	135	60	30	0	1
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	11/10	9/8	1/2	1/4	0	1/120
$\gamma_{n\ n-k}$	30240	27000	7200	3600	0	120
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	252	225	60	30	0	1
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	21/10	15/8	1/2	1/4	0	1/120

Таблица 3.1.5

n	6	6	6	6	6	6	6
k	6	5	4	3	2	1	0
$carry_{new\ n-k^n}$	820800	518400	194400	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	1140	720	270	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	19/12	1	3/8	0	0	0	0
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	572400	570240	291600	86400	32400	0	720
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	795	792	405	120	45	0	1
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	53/48	11/10	9/16	1/6	3/8	0	1/720
$\gamma_{n\ n-k}$	1393200	1088640	486000	86400	32400	0	720
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	1935	1512	675	120	45	0	1
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	43/16	21/10	15/16	1/6	3/8	0	1/720

Таблица 3.1.6

n	7	7	7	7	7	7	7	7
k	7	6	5	4	3	2	1	0
$carry_{new\ n-k^n}$	53343360	40219200	12700800	3175200	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	10584	7980	2520	630	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	21/10	19/12	1/2	1/8	0	0	0	0
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	28032480	28047600	13970880	4762800	1058400	317520	0	5040
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	5562	5565	2772	945	210	63	0	1
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	309/280	53/48	11/20	3/16	1/24	1/80	0	1/5040
$\gamma_{n\ n-k}$	81375840	68266800	26671680	7938000	1058400	317520	0	5040
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	16146	13545	5292	1575	210	63	0	1
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	897/280	43/16	21/20	5/16	1/24	1/80	0	1/5040

Таблица 3.1.7

n	8	8	8	8
k	8	7	6	5
$carry_{new\ n-k^n}$	4401250560	3413975040	1287014400	270950400
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	109158	84672	31920	6720
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	2599/960	21/10	19/24	1/6
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	1794199680	1794078720	897523200	298045440
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	44499	44496	22260	7392
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	14833/13440	309/280	53/96	11/60
$\gamma_{n\ n-k}$	6195450240	5208053760	2184537600	568995840
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	153657	129168	54180	14112
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	2439/640	897/280	43/32	7/20

Окончание табл. 3.1.7

n	8	8	8	8	8
k	4	3	2	1	0
$carry_{new\ n-k^n}$	50803200	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	1260	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	1/32	0	0	0	0
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	76204800	13547520	3386880	0	40320
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	1890	336	84	0	1
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	3/64	1/120	1/480	0	1/40320
$\gamma_{n\ n-k}$	127008000	13547520	3386880	0	40320
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	3150	336	84	0	1
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	5/64	1/120	1/480	0	1/40320

Для матриц порядка 9 с элементами, удовлетворяющими условию (*), вычислить коэффициенты γ_{nn-k} с помощью ЭВМ точно можно только при наличии мощностей, способных рассортировать около 10^{22} произведений вида (I), (II) или (III) по степеням элементов матриц. Используя эмпирическую зависимость (В.2.1) и вычислив 10^{11} случайных матриц с элементами из $\{-1,\ 0,\ 1\}$, найдем примерное выражение для $\gamma_{9\ 9-k}/9!^2, k \in \{0,\ ...,n\}$ из уравнения:

$$||\vec{M}^{9-k}(U^4(\vec{m}))\cdot\vec{M}^{2k}(U^2(\vec{m}))||^T||\vec{\gamma}_{99-k}||=1414121829+\delta_{10^{11}},$$

где $M(U^2(\vec{m}))=M(U^4(\vec{m}))=\frac{2}{3}$.

Откуда

$$\frac{\gamma_{90}}{9!^2}=\frac{77003}{17280}+\tilde{\delta}_{10^{11}}.$$

Таблица 3.1.8

n	9	9	9
k	9	8	7
$carry_{new\ n-k^n}$	~441470736000	356501295360	138265989120
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	~1216575	982422	381024
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	~27035/8064	2599/960	21/20
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	145329085440	145330174080	72660188160
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	400488	400491	200232
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	16687/15120	14833/13440	309/560
$\gamma_{n\ n-k}$	~586799821440	501831469440	210926177280
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	~1617063	1382913	581256
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	~77003/17280	2439/640	897/560

Продолжение табл. 3.1.8

n	9	9	9
k	6	5	4
$carry_{new\ n-k^n}$	3474938880	5486745600	823011840
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	95760	15120	2268
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	19/72	1/24	1/160
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	24233126400	6035420160	1234517760
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	66780	16632	1134
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	53/288	11/240	3/320
$\gamma_{n\ n-k}$	58982515200	11522165760	2057529600
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	162540	31752	3402
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	43/96	7/80	1/64

Окончание табл. 3.1.8

n	9	9	9	9
k	3	2	1	0
$carry_{new\ n-k^n}$	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	0	0	0	0
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	0	0	0	0
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	182891520	39191040	0	362880
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	504	108	0	1
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	1/720	1/3360	0	1/362880
$\gamma_{n\ n-k}$	182891520	39191040	0	362880
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	504	108	0	1
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	1/720	1/3360	0	1/362880

Таблица 3.1.9

Таблица коэффициентов $\gamma_{n\,0}$, полученных на основании данных таблиц 3.1.8, 3.1.10 и 3.1.11, а также постулата (В.2.1)

n	9	10	11	12
k	9	10	11	12
$carry_{new\ n-k^n}$	4,41471E+11	5,31803E+13	7,65415E+15	1,28329E+18
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	1,21658E+06	1,46551E+07	1,91753E+08	2,67909E+09
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	3,35256E+00	4,03854E+00	4,80381E+00	5,59307E+00
$\gamma_{n\,n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	1,45329E+11	1,45329E+13	1,75848E+15	2,53222E+17
$(\gamma_{n\,n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	4,00488E+05	4,00488E+06	4,40537E+07	5,28645E+08
$(\gamma_{n\,n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	1,10364E+00	1,10364E+00	1,10364E+00	1,10364E+00
$\gamma_{n\,n-k}$	5,86800E+11	6,77132E+13	9,41264E+15	1,53651E+18
$\gamma_{n\,n-k}/n!$	1,61706E+06	1,86599E+07	2,35806E+08	3,20773E+09
$\gamma_{n\,n-k}/n!^2$	4,45619E+00	5,14218E+00	5,90745E+00	6,69671E+00

Продолжение табл. 3.1.9

n	13	14	15	16
k	13	14	15	16
$carry_{new\ n-k^n}$	2,49486E+20	5,61066E+22	1,39523E+25	4,05941E+27
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	4,00650E+10	6,43585E+11	1,06696E+13	1,94018E+14
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	6,43406E+00	7,38239E+00	8,15920E+00	9,27307E+00
$\gamma_{n\,n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	4,27944E+19	8,38771E+21	1,88724E+24	4,83132E+26
$(\gamma_{n\,n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	6,87238E+09	9,62133E+10	1,44320E+12	2,30912E+13
$(\gamma_{n\,n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	1,10364E+00	1,10364E+00	1,10364E+00	1,10364E+00
$\gamma_{n\,n-k}$	2,92280E+20	6,44943E+22	1,58396E+25	4,54254E+27
$\gamma_{n\,n-k}/n!$	4,69374E+10	7,39798E+11	1,21128E+13	2,17110E+14
$\gamma_{n\,n-k}/n!^2$	7,53770E+00	8,48603E+00	9,26284E+00	1,03767E+01

Продолжение табл. 3.1.9

n	17	18	19	20
k	17	18	19	20
$carry_{new\ n-k^n}$	1,29809E+30	4,95574E+32	1,80845E+35	8,00601E+37
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	3,64951E+15	7,74048E+16	1,48666E+18	3,29072E+19
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	1,02604E+01	1,20900E+01	12,22132798	13,52591713
$\gamma_{n\,n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	1,39625E+29	4,52386E+31	1,63311E+34	6,53245E+36
$(\gamma_{n\,n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	3,92550E+14	7,06590E+15	1,34252E+17	2,68504E+18
$(\gamma_{n\,n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	1,10364E+00	1,10364E+00	1,103638324	1,103638324
$\gamma_{n\,n-k}$	1,43771E+30	5,40813E+32	1,97177E+35	8,65925E+37
$\gamma_{n\,n-k}/n!$	4,04206E+15	8,44707E+16	1,62092E+18	3,55923E+19
$\gamma_{n\,n-k}/n!^2$	1,13641E+01	1,31936E+01	13,3249663	14,62955545

Продолжение табл. 3.1.9

n	21	22	23	24
k	21	22	23	24
$carry_{new\ n-k^n}$	4,0352E+40	1,89836E+43	1,23848E+46	7,5183E+48
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	7,898E+20	1,68893E+22	4,79064E+23	1,21175E+25
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	15,4587086	15,02608998	18,53101237	19,53027787
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	2,8808E+39	1,39431E+42	7,37591E+44	4,24852E+47
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	5,6386E+19	1,24049E+21	2,85313E+22	6,84751E+23
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	1,10363832	1,103638324	1,103638324	1,103638324
$\gamma_{n\ n-k}$	4,3232E+40	2,03779E+43	1,31224E+46	7,94315E+48
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	8,4619E+20	1,81298E+22	5,07595E+23	1,28023E+25
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	16,5623469	16,1297283	19,6346507	20,63391619

Продолжение табл. 3.1.9

n	25	26	27	28
k	25	26	27	28
$carry_{new\ n-k^n}$	4,69234E+51	4,26921E+54	1,90114E+57	2,93835E+60
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	3,02513E+26	1,05859E+28	1,74595E+29	9,63748E+30
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	1,95029E+01	2,62488E+01	1,60343E+01	3,16099E+01
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	2,65533E+50	1,79500E+53	1,30856E+56	1,02591E+59
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	1,71188E+25	4,45088E+26	1,20174E+28	3,36486E+29
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	1,10364E+00	1,10364E+00	1,10364E+00	1,10364E+00
$\gamma_{n\ n-k}$	4,95787E+51	4,44871E+54	2,03200E+57	3,04095E+60
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	3,19632E+26	1,10310E+28	1,86612E+29	9,97396E+30
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	2,06065E+01	2,73525E+01	1,71379E+01	3,27135E+01

Продолжение табл. 3.1.9

n	29	30	31	32
k	29	30	31	32
$carry_{new\ n-k^n}$	1,75917E+63	2,04762E+66	2,3355E+69	1,92918E+72
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	1,98962E+32	7,71949E+33	2,8403E+35	7,33163E+36
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	22,50249556	29,10237016	34,5411397	27,86307251
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	8,62789E+61	7,7651E+64	7,4623E+67	7,64135E+70
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	9,75811E+30	2,92743E+32	9,075E+33	2,90401E+35
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	1,103638324	1,103638324	1,10363832	1,103638324
$\gamma_{n\ n-k}$	1,84545E+63	2,12527E+66	2,4101E+69	2,00559E+72
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	2,0872E+32	8,01223E+33	2,931E+35	7,62203E+36
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	23,60613389	30,20600849	35,644778	28,96671084

Продолжение табл. 3.1.9

n	33	34	35	36
k	33	34	35	36
$carry_{new\ n-k^n}$	2,67839E+75	2,90608E+78	5,04117E+81	3,88269E+84
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	3,08452E+38	9,84333E+39	4,87864E+41	1,04375E+43
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	35,52241195	33,34092445	4,72135E+01	2,80583E+01
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	8,32143E+73	9,61958E+76	1,17840E+80	1,52720E+83
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	9,58324E+36	3,2583E+38	1,14041E+40	4,10546E+41
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	1,103638324	1,103638324	1,10364E+00	1,10364E+00
$\gamma_{n\ n-k}$	2,7616E+75	3,00227E+78	5,15901E+81	4,03541E+84
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	3,18036E+38	1,01692E+40	4,99268E+41	1,08481E+43
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	36,62605027	34,44456277	4,83172E+01	2,91620E+01

Окончание табл. 3.1.9

n	37	38	39	40
k	37	38	39	40
$carry_{new\ n-k^n}$	8,33666E+87	1,15754E+91	2,22959E+94	2,71558E+97
$carry_{new\ n-k^n}/n!$	6,05697E+44	2,21318E+46	1,09305E+48	3,32826E+49
$carry_{new\ n-k^n}/n!^2$	4,40066E+01	4,23151E+01	5,35863E+01	4,07918E+01
$\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n}$	2,09074E+86	3,01903E+89	4,59195E+92	7,34712E+95
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!$	1,51902E+43	5,77228E+44	2,25119E+46	9,00475E+47
$(\gamma_{n\ n-k} - carry_{new\ n-k^n})/n!^2$	1,10364E+00	1,10364E+00	1,10364E+00	1,10364E+00
$\gamma_{n\ n-k}$	8,54573E+87	1,18773E+91	2,27551E+94	2,78905E+97
$\gamma_{n\ n-k}/n!$	6,20887E+44	2,27090E+46	1,11556E+48	3,41831E+49
$\gamma_{n\ n-k}/n!^2$	4,51103E+01	4,34188E+01	5,46900E+01	4,18954E+01

Количество верных знаков таблицы 3.1.9 невелико — оно составляет более чем 2 знака для начала таблицы (матрицы порядка 9) и убывает до менее чем одной цифры к концу таблицы (матрицы порядка 40 и более).

Таким образом, мы пришли к постулату, что при стохастических вычислениях количество значащих цифр второго стохастического момента абсолютного значения детерминанта сохраняется при повышении порядка матрицы или кольца ее элементов, при сохранении одинаковой выборки матриц. Количество же значащих цифр четвертого стохастического момента абсолютного значения детерминанта сохраняется при повышении порядка кольца ее элементов, но убывает при повышении порядка матрицы, при сохранении одинаковой выборки матриц.

Таблица 3.1.10

$Z_{-1;1}$, количество модулей определителей 10 000 000 000

Порядок	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс
10	1,474164E+02	2,029661E+02	3,778718E+00	2,635262E+01
11	3,910158E+02	5,554909E+02	4,051678E+00	3,097552E+01
12	1,084732E+03	1,585885E+03	4,313553E+00	3,589022E+01
13	3,136233E+03	4,707683E+03	4,566143E+00	4,104849E+01
14	9,420719E+03	1,448723E+04	4,811037E+00	4,660627E+01

Таблица 3.1.11

$Z_{-1;1}$, количество модулей определителей 1 000 000 000

Порядок	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс
15	2,932121E+04	4,611200E+04	5,046506E+00	5,237781E+01
16	9,435252E+04	1,514989E+05	5,275251E+00	5,831619E+01
17	3,132069E+05	5,128205E+05	5,505638E+00	6,455921E+01
18	1,070510E+06	1,785006E+06	5,737617E+00	7,249160E+01
19	3,762117E+06	6,380868E+06	5,954557E+00	7,951352E+01
20	1,357302E+07	2,339389E+07	6,157747E+00	8,565298E+01
21	5,020716E+07	8,787988E+07	6,374215E+00	9,322219E+01
22	1,901686E+08	3,376673E+08	6,565790E+00	9,935178E+01
23	7,368618E+08	1,326711E+09	6,773790E+00	1,077028E+02
24	2,917950E+09	5,323626E+09	6,984828E+00	1,180207E+02
25	1,179683E+10	2,179419E+10	7,178429E+00	1,257948E+02
26	4,865717E+10	9,097556E+10	7,392661E+00	1,403446E+02
27	2,045861E+11	3,868841E+11	7,544346E+00	1,406787E+02
28	8,761961E+11	1,675947E+12	7,760246E+00	1,521561E+02
29	3,820798E+12	7,388562E+12	7,956913E+00	1,608570E+02
30	1,694826E+13	3,309859E+13	8,107239E+00	1,693464E+02
31	7,644536E+13	1,507974E+14	8,330310E+00	1,866097E+02
32	3,504249E+14	6,979474E+14	8,501919E+00	1,949758E+02
33	1,631540E+15	3,280021E+15	8,686328E+00	2,030765E+02
34	7,711626E+15	1,564298E+16	8,846445E+00	2,091078E+02
35	3,698763E+16	7,567613E+16	9,068134E+00	2,333482E+02
36	1,799584E+17	3,712798E+17	9,216065E+00	2,370742E+02
37	8,880260E+17	1,847080E+18	9,345249E+00	2,381508E+02
38	4,440700E+18	9,308562E+18	9,506713E+00	2,493546E+02
39	2,250049E+19	4,754234E+19	9,743042E+00	2,753146E+02
40	1,154843E+20	2,458669E+20	9,929277E+00	2,852313E+02

$$\det||A_{n\times n}||=\sum_{l=1}^{n!}\left((-1)^{t(j)}\prod_{k=1}^{n}a_{k\,j_k}\right)_l \qquad \text{(B.3.1)}$$

$$\left(\det||A_{n\times n}||\right)^2=\left(\sum_{l=1}^{n!}\left((-1)^{t(j)}\prod_{k=1}^{n}a_{k\,j_k}\right)_l\right)^2$$

$$\left(\det||A_{n\times n}||\right)^3=\left(\sum_{l=1}^{n!}\left((-1)^{t(j)}\prod_{k=1}^{n}a_{k\,j_k}\right)_l\right)^3$$

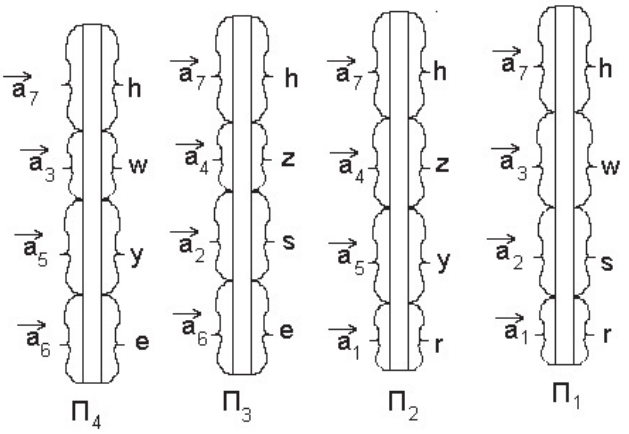
$$\left(\det||A_{n\times n}||\right)^4=\left(\sum_{l=1}^{n!}\left((-1)^{t(j)}\prod_{k=1}^{n}a_{k\,j_k}\right)_l\right)^4 \qquad \text{(B.3.2.1)}$$

Каждое из n^2 a_{ij} матрицы $A_{n\times n}$; $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ встречается в $(n-1)!$ произведений (B.3.1). Соответственно, 4-я степень каждого из n^2 элементов будет встречаться в $((n-1)!)^4$ произведений (B.3.2.1). Если теперь выбрать какие-либо 2 определенных элементов из n^2, то они будут встречаться в зависимости от выбора второго элемента в $(n-2)!$ произведений (B.3.1) или, если первый и второй элементы лежат в одной строке или столбце, то ни в каком из произведений (B.3.1). Соответственно, 4-я степень каждых 2-х элементов из n^2 элементов будет встречаться в $((n-2)!)^4$ произведений (B.3.2.1) или ни в каком из произведений (B.3.2.1).

Если теперь выбрать какие-либо r определенных элементов $(r<n)$ из n^2, то они будут встречаться в зависимости от выбора этих элементов в $(n-r)!$ произведений (B.3.1) или, если какой-либо последующий элемент лежит в одной строке или столбце с каким-либо из предыдущих элементов, то ни в каком из произведений (B.3.1). Соответственно, 4-я степень каждых $r-x$ элементов из n^2 элементов будет встречаться в $((n-r)!)^4$ произведений (B.3.2.1) или ни в каком из произведений (B.3.2.1).

Перепишем (B.3.2.1) в виде:

$$\left(\det||A_{n\times n}||\right)^4=\left(\sum_{l=1}^{n!}\left((-1)^{t(j)}\prod_{k=1}^{n}a_{kj_k}\right)_l\right)\left(\sum_{l=1}^{n!}\left((-1)^{t(j)}\prod_{k=1}^{n}a_{kj_k}\right)_l\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{l=1}^{n!}\left((-1)^{t(j)}\prod_{k=1}^{n}a_{kj_k}\right)_l\right)\left(\sum_{l=1}^{n!}\left((-1)^{t(j)}\prod_{k=1}^{n}a_{kj_k}\right)_l\right). \qquad \text{(B.3.2.2)}$$



Каждую из 4-х сум произведений (В.3.2.2) $\prod_{k=1}^{n} a_{k\,j_k}$ можно представить в зависимости от числа компонент $a_{k\,j_k}$, совпадающего у данного произведения с остальными произведениями в оставшихся трех суммах. Если нас интересуют только такие члены (В.3.2.2), каждая из компонент $a_{k\,j_k}$ которых возведена в полный квадрат, то справедливы равенства:

$$h+w+s+r=h+y+z+r=h+e+z+s=h+e+y+w=n.$$

Здесь h — количество компонент $a_{k\,j_k}$, одинаковых во всех четырех суммах произведений $\prod_{k=1}^{n} a_{k\,j_k}$; r — количество компонент $a_{k\,j_k}$ одинаковых в первых двух суммах произведений $\prod_{k=1}^{n} a_{k\,j_k}$; s — количество компонент $a_{k\,j_k}$, одинаковых в первой и третьей суммах произведений $\prod_{k=1}^{n} a_{k\,j_k}$; w — количество компонент $a_{k\,j_k}$, одинаковых в первой и последней сумме произведений $\prod_{k=1}^{n} a_{k\,j_k}$; y — количество компонент $a_{k\,j_k}$, одинаковых во второй и последней сумме произведений $\prod_{k=1}^{n} a_{k\,j_k}$;

z — количество компонент $a_{k\,j_k}$, одинаковых во второй и третьей сумме произведений $\prod_{k=1}^{n} a_{k\,j_k}$; e — количество компонент $a_{k\,j_k}$, одинаковых в последней и предпоследней сумме произведений $\prod_{k=1}^{n} a_{k\,j_k}$. Решение этой системы уравнений являются равенства:

$$y = s;\ z = w;\ e = r;\ r = n - w - s - h. \qquad \text{(B.4)}$$

Следовательно, $\dim \mathbf{a_4} = \dim \mathbf{a_3}$; $\dim \mathbf{a_1} = \dim \mathbf{a_6}$; $\dim \mathbf{a_2} = \dim \mathbf{a_5}$.

Построение модели четвертого стохастического момента детерминанта явно указывает, что его аналитическое определение невозможно. Численные расчеты показывают, что с ростом порядка матрицы количество значащих цифр четвертого стохастического момента сокращается, для матриц более 30-го порядка нужно более 10^9 случайных матриц, чтобы узнать хотя бы одну значащую цифру, в то время как для матриц менее 8-го порядка количество значащих цифр для того же числа случайных матриц составляет более 2-х. Для стохастического момента 2-го порядка ухудшение точности с ростом порядка матрицы замечено не было. Распределения стохастического момента 2-го порядка детерминанта на данный момент единственные, которые доступны для аналитических исследований, — это их альфа и омега!

3.2. Произвольные вещественные элементы матрицы

$$\mu_4\left(\left|\det\left|\left|A_{n\times n}\{U(\vec{m})\}\right|\right|\right)=\sum_{f=0}^{4n}\sum_{s=0}^{\frac{4n-f}{2}}\sum_{t=0}^{\frac{4n-f-2s}{3}}\zeta_{f\,s\,t\;(4n-f-2s-3t)/4}\times \tag{B.5}$$

$$\times M^{\frac{4n-f-2s-3t}{4}}(U^4(\vec{m}))\cdot M^s(U^2(\vec{m}))\cdot M^t(U^3(\vec{m}))\cdot M^f(U(\vec{m})).$$

Таблица 3.2.1

Порядок 2

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	ζ_{fst}/n!	ζ_{fst}/n!^{2}
0	4	0	0	6	3	3/2
0	0	0	2	2	1	1/2
2	0	2	0	–8	–4	–2

Таблица 3.2.2

Порядок 3

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	ζ_{fst}/n!	ζ_{fst}/n!^{2}
4	1	2	0	216	36	6
4	4	0	0	216	36	6
0	4	0	1	54	9	3/2
3	0	3	0	48	8	4/3
0	6	0	0	36	6	1
0	0	0	3	6	1	1/6
2	0	2	1	–72	–12	–2
6	3	0	0	–72	–12	–2
3	3	1	0	–432	–72	–12

Таблица 3.2.3

Порядок 4

f	s	t	$(4n-f-2s-3t)/4$	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
10	3	0	0	13824	576	24
4	3	2	0	10368	432	18
6	2	2	0	10368	432	18
6	5	0	0	10368	432	18
5	4	1	0	6912	288	12
9	2	1	0	6912	288	12
4	1	2	1	3456	144	6
4	4	0	1	3456	144	6
0	8	0	0	1080	45	15/8
3	0	3	1	768	32	4/3
0	6	0	1	576	24	1
4	0	4	0	576	24	1
16	0	0	0	576	24	1
0	4	0	2	432	18	3/4
0	0	0	4	24	1	1/24
2	0	2	2	–576	–24	–1
6	3	0	1	–1152	–48	–2
2	4	2	0	–1728	–72	–3
7	0	3	0	–2304	–96	–4
4	6	0	0	–3456	–144	–6
3	3	1	1	–6912	–288	–12
3	5	1	0	–6912	–288	–12
5	1	3	0	–6912	–288	–12
12	2	0	0	–6912	–288	–12
8	4	0	0	–12096	–504	–21
7	3	1	0	–20736	–864	–36

Таблица 3.2.4

Порядок 5

f	s	t	$(4n-f-2s-3t)/4$	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
9	4	1	0	1382400	11520	96
12	4	0	0	1339200	11160	93
5	6	1	0	864000	7200	60
10	2	2	0	777600	6480	54
15	1	1	0	691200	5760	48
6	7	0	0	561600	4680	39
8	3	2	0	403200	3360	28
4	5	2	0	388800	3240	27
10	3	0	1	345600	2880	24
18	1	0	0	345600	2880	24
4	3	2	1	259200	2160	18
6	2	2	1	259200	2160	18
6	5	0	1	259200	2160	18
8	0	4	0	187200	1560	13
5	4	1	1	172800	1440	12
9	2	1	1	172800	1440	12
6	1	4	0	86400	720	6
4	1	2	2	43200	360	3
4	4	0	2	43200	360	3
0	10	0	0	30240	252	21/10
3	4	3	0	28800	240	2
0	8	0	1	27000	225	7/8
4	0	4	1	14400	120	1
16	0	0	1	14400	120	1
3	0	3	2	9600	80	2/3
0	6	0	2	7200	60	1/2
0	4	0	3	3600	30	1/4
0	0	0	5	120	1	1/120
2	0	2	3	–4800	–40	–1/3
6	3	0	2	–14400	–120	–1
5	0	5	0	–26880	–224	–28/15
2	6	2	0	–28800	–240	–2
2	4	2	1	–43200	–360	–3

Окончание табл. 3.2.4

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
7	0	3	1	–57600	–480	–4
20	0	0	0	–69120	–576	–24/5
3	3	1	2	–86400	–720	–6
4	6	0	1	–86400	–720	–6
10	5	0	0	–120960	–1008	–42/5
4	8	0	0	–129600	–1080	–9
3	5	1	1	–172800	–1440	–12
5	1	3	1	–172800	–1440	–12
9	1	3	0	–172800	–1440	–12
12	2	0	1	–172800	–1440	–12
17	0	1	0	–230400	–1920	–16
8	4	0	1	–302400	–2520	–21
12	1	2	0	–345600	–2880	–24
16	2	0	0	–345600	–2880	–24
3	7	1	0	–432000	–3600	–30
6	4	2	0	–518400	–4320	–36

Таблица 3.2.5

Порядок 6

f	s	t	(4n−f−2s−3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
17	2	1	0	273715200	380160	528
11	5	1	0	267494400	371520	516
20	2	0	0	230169600	319680	444
14	2	2	0	217728000	302400	420
14	5	0	0	199065600	276480	384
10	7	0	0	164851200	228960	318
16	4	0	0	106531200	147960	411/2
9	3	3	0	91929600	127680	532/3
9	6	1	0	77760000	108000	150
6	9	0	0	67910400	94320	131
5	8	1	0	65318400	90720	126
9	4	1	1	49766400	69120	96
12	4	0	1	48211200	66960	93
18	0	2	0	44582400	61920	86
5	6	1	1	31104000	43200	60
10	2	2	1	27993600	38880	54
4	7	2	0	26438400	36720	51
15	1	1	1	24883200	34560	48
21	0	1	0	24883200	34560	48
6	7	0	1	20217600	28080	39
8	3	2	1	14515200	20160	28
4	5	2	1	13996800	19440	27
8	2	4	0	13996800	19440	27
10	1	4	0	12441600	17280	24
13	1	3	0	12441600	17280	24
18	1	0	1	12441600	17280	24
24	0	0	0	9331200	12960	18
15	0	3	0	8294400	11520	16
8	0	4	1	6739200	9360	13
10	3	0	2	6220800	8640	12
4	3	2	2	4665600	6480	9
6	2	2	2	4665600	6480	9
6	5	0	2	4665600	6480	9
7	1	5	0	4147200	5760	8

Продолжение табл. 3.2.5

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
5	4	1	2	3110400	4320	6
6	1	4	1	3110400	4320	6
9	2	1	2	3110400	4320	6
12	0	4	0	3110400	4320	6
0	12	0	0	1393200	1935	43/16
0	10	0	1	1088640	1512	21/10
3	4	3	1	1036800	1440	2
4	4	4	0	777600	1080	3/2
3	6	3	0	691200	960	4/3
4	1	2	3	518400	720	1
4	4	0	3	518400	720	1
0	8	0	2	486000	675	15/16
6	0	6	0	460800	640	8/9
4	0	4	2	259200	360	1/2
16	0	0	2	259200	360	1/2
3	0	3	3	115200	160	2/9
0	6	0	3	86400	120	1/6
0	4	0	4	32400	45	1/16
0	0	0	6	720	1	1/720
2	0	2	4	–43200	–60	–1/12
6	3	0	3	–172800	–240	–1/3
2	4	2	2	–777600	–1080	–3/2
5	0	5	1	–967680	–1344	–28/15
2	6	2	1	–1036800	–1440	–2
3	3	1	3	–1036800	–1440	–2
7	0	3	2	–1036800	–1440	–2
4	6	0	2	–1555200	–2160	–3
2	8	2	0	–1944000	–2700	–15/4
20	0	0	1	–2488320	–3456	–24/5
3	5	1	2	–3110400	–4320	–6
5	1	3	2	–3110400	–4320	–6
12	2	0	2	–3110400	–4320	–6
10	5	0	1	–4354560	–6048	–42/5
4	8	0	1	–4665600	–6480	–9

Окончание табл. 3.2.5

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
6	6	2	0	–4665600	–6480	–9
8	4	0	2	–5443200	–7560	–21/2
9	1	3	1	–6220800	–8640	–12
17	0	1	1	–8294400	–11520	–16
5	5	3	0	–9331200	–12960	–18
7	3	1	2	–9331200	–12960	–18
9	0	5	0	–10368000	–14400	–20
6	3	4	0	–11404800	–15840	–22
12	1	2	1	–12441600	–17280	–24
16	2	0	1	–12441600	–17280	–24
3	7	1	1	–15552000	–21600	–30
4	10	0	0	–17107200	–23760	–33
7	4	3	0	–17625600	–24480	–34
6	4	2	1	–18662400	–25920	–36
7	2	3	1	–18662400	–25920	–36
8	5	2	0	–18662400	–25920	–36
3	9	1	0	–21772800	–30240	–42
14	3	0	1	–24883200	–34560	–48
8	6	0	1	–31104000	–43200	–60
7	5	1	1	–37324800	–51840	–72
15	3	1	0	–37324800	–51840	–72
11	3	1	1	–55987200	–77760	–108
10	4	2	0	–59097600	–82080	–114
22	1	0	0	–74649600	–103680	–144
11	2	3	0	–111974400	–155520	–216
8	8	0	0	–118972800	–165240	–459/2
7	7	1	0	–139968000	–194400	–270
19	1	1	0	–149299200	–207360	–288
16	1	2	0	–186624000	–259200	–360
12	6	0	0	–252460800	–350640	–487
18	3	0	0	–315187200	–437760	–608
13	4	1	0	–367027200	–509760	–708

Таблица 3.2.6

Порядок 7

f	s	t	(4n−f−2s−3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
19	3	1	0	195998745600	38888640	7716
15	5	1	0	65840947200	13063680	2592
22	3	0	0	62132313600	12327840	2446
16	3	2	0	56086732800	11128320	2208
16	6	0	0	51387436800	10195920	2023
14	4	2	0	46637337600	9253440	1836
10	6	2	0	36654508800	7272720	1443
20	1	2	0	34901798400	6924960	1374
17	1	3	0	31701196800	6289920	1248
23	1	1	0	31701196800	6289920	1248
13	3	3	0	27840153600	5523840	1096
10	9	0	0	18426320640	3656016	3627/5
17	2	1	1	13412044800	2661120	528
11	5	1	1	13107225600	2600640	516
20	2	0	1	11278310400	2237760	444
14	2	2	1	10668672000	2116800	420
14	5	0	1	9754214400	1935360	384
9	5	3	0	8382528000	1663200	330
10	7	0	1	8077708800	1602720	318
18	5	0	0	7620480000	1512000	300
9	8	1	0	7315660800	1451520	288
6	11	0	0	7296609600	1447740	1149/4
26	1	0	0	6706022400	1330560	264
5	10	1	0	6553612800	1300320	258
8	4	4	0	5245430400	1040760	413/2
16	4	0	1	5220028800	1035720	411/2
12	2	4	0	5131123200	1018080	202
9	3	3	1	4504550400	893760	532/3
9	6	1	1	3810240000	756000	150
14	1	4	0	3657830400	725760	144
6	9	0	1	3327609600	660240	131
5	8	1	1	3200601600	635040	126
12	8	0	0	3010089600	597240	237/2

Продолжение табл. 3.2.6

f	s	t	(4n−f−2s−3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
18	0	2	1	2184537600	433440	86
4	9	2	0	1886068800	374220	297/4
4	7	2	1	1295481600	257040	51
9	4	1	2	1219276800	241920	48
21	0	1	1	1219276800	241920	48
12	4	0	2	1181174400	234360	93/2
11	7	1	0	1066867200	211680	42
5	6	1	2	762048000	151200	30
8	2	4	1	685843200	136080	27
10	2	2	2	685843200	136080	27
7	3	5	0	609638400	120960	24
10	1	4	1	609638400	120960	24
13	1	3	1	609638400	120960	24
15	1	1	2	609638400	120960	24
6	7	0	2	495331200	98280	39/2
10	0	6	0	474163200	94080	56/3
24	0	0	1	457228800	90720	18
15	0	3	1	406425600	80640	16
8	3	2	2	355622400	70560	14
4	5	2	2	342921600	68040	27/2
18	1	0	2	304819200	60480	12
7	1	5	1	203212800	40320	8
8	0	4	2	165110400	32760	13/2
12	0	4	1	152409600	30240	6
10	3	0	3	101606400	20160	4
0	14	0	0	81375840	16146	2691/840
4	3	2	3	76204800	15120	3
6	1	4	2	76204800	15120	3
6	2	2	3	76204800	15120	3
6	5	0	3	76204800	15120	3
0	12	0	1	68266800	13545	43/16
3	8	3	0	63504000	12600	5/2

Продолжение табл. 3.2.6

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
5	4	1	3	50803200	10080	2
9	2	1	3	50803200	10080	2
4	4	4	1	38102400	7560	3/2
3	6	3	1	33868800	6720	4/3
0	10	0	2	26671680	5292	21/20
3	4	3	2	25401600	5040	1
4	6	4	0	25401600	5040	1
6	0	6	1	22579200	4480	8/9
0	8	0	3	7938000	1575	5/16
7	0	7	0	7741440	1536	32/105
4	1	2	4	6350400	1260	1/4
4	4	0	4	6350400	1260	1/4
4	0	4	3	4233600	840	1/6
16	0	0	3	4233600	840	1/6
3	0	3	4	1411200	280	1/18
0	6	0	4	1058400	210	1/24
0	4	0	5	317520	63	1/80
0	0	0	7	5040	1	1/5040
2	0	2	5	–423360	–84	–1/60
6	3	0	4	–2116800	–420	–1/12
2	4	2	3	–12700800	–2520	–1/2
3	3	1	4	–12700800	–2520	–1/2
7	0	3	3	–16934400	–3360	–2/3
5	0	5	2	–23708160	–4704	–14/15
2	6	2	2	–25401600	–5040	–1
4	6	0	3	–25401600	–5040	–1
3	5	1	3	–50803200	–10080	–2
5	1	3	3	–50803200	–10080	–2
12	2	0	3	–50803200	–10080	–2
20	0	0	2	–60963840	–12096	–12/5
5	4	5	0	–71124480	–14112	–14/5
8	4	0	3	–88905600	–17640	–7/2

Продолжение табл. 3.2.6

f	s	t	$(4n-f-2s-3t)/4$	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
2	8	2	1	–95256000	–18900	–15/4
2	10	2	0	–106686720	–21168	–21/5
10	5	0	2	–106686720	–21168	–21/5
4	8	0	2	–114307200	–22680	–9/2
7	3	1	3	–152409600	–30240	–6
9	1	3	2	–152409600	–30240	–6
17	0	1	2	–203212800	–40320	–8
6	6	2	1	–228614400	–45360	–9
5	7	3	0	–304819200	–60480	–12
9	2	5	0	–304819200	–60480	–12
12	1	2	2	–304819200	–60480	–12
16	2	0	2	–304819200	–60480	–12
6	5	4	0	–330220800	–65520	–13
3	7	1	2	–381024000	–75600	–15
8	1	6	0	–406425600	–80640	–16
5	5	3	1	–457228800	–90720	–18
6	4	2	2	–457228800	–90720	–18
7	2	3	2	–457228800	–90720	–18
9	0	5	1	–508032000	–100800	–20
6	3	4	1	–558835200	–110880	–22
13	0	5	0	–609638400	–120960	–24
14	3	0	2	–609638400	–120960	–24
28	0	0	0	–638668800	–126720	–176/7
8	6	0	2	–762048000	–151200	–30
4	10	0	1	–838252800	–166320	–33
7	4	3	1	–863654400	–171360	–34
7	5	1	2	–914457600	–181440	–36
8	5	2	1	–914457600	–181440	–36
3	9	1	1	–1066867200	–211680	–42
11	3	1	2	–1371686400	–272160	–54
4	12	0	0	–1619352000	–321300	–255/4
3	11	1	0	–1638403200	–325080	–129/2

Окончание табл. 3.2.6

f	s	t	$(4n-f-2s-3t)/4$	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
6	8	2	0	–1828915200	–362880	–72
15	3	1	1	–1828915200	–362880	–72
16	0	4	0	–1828915200	–362880	–72
8	7	2	0	–2895782400	–574560	–114
10	4	2	1	–2895782400	–574560	–114
22	1	0	1	–3657830400	–725760	–144
25	0	1	0	–3657830400	–725760	–144
13	6	1	0	–3962649600	–786240	–156
11	4	3	0	–4064256000	–806400	–160
22	0	2	0	–5242890240	–1040256	–1032/5
11	2	3	1	–5486745600	–1088640	–216
8	8	0	1	–5829667200	–1156680	–459/2
7	6	3	0	–6248793600	–1239840	–246
19	0	3	0	–6468940800	–1283520	–764/3
7	7	1	1	–6858432000	–1360800	–270
19	1	1	1	–7315660800	–1451520	–288
16	1	2	1	–9144576000	–1814400	–360
10	3	4	0	–11176704000	–2217600	–440
12	6	0	1	–12370579200	–2454480	–487
7	9	1	0	–12802406400	–2540160	–504
18	3	0	1	–15444172800	–3064320	–608
8	10	0	0	–15926803200	–3160080	–627
13	4	1	1	–17984332800	–3568320	–708
24	2	0	0	–28653004800	–5685120	–1128
14	7	0	0	–45156787200	–8959680	–12444/7
15	2	3	0	–51616051200	–10241280	–2032
20	4	0	0	–64652152320	–12827808	–12726/5
18	2	2	0	–79862630400	–15845760	–3144
12	5	2	0	–85837086720	–17031168	–16896/5
21	2	1	0	–110954188800	–22014720	–4368
17	4	1	0	–175575859200	–34836480	–6912

Таблица 3.2.7

Порядок 8

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
20	3	2	0	–56909338214400	–1411441920	–35006
22	5	0	0	–47298185625600	–1173070080	–29094
16	5	2	0	–40284905472000	–999129600	–24780
23	3	1	0	–33077191311360	–820366848	–101732/5
18	7	0	0	–29379693772800	–728663040	–18072
17	6	1	0	–24801715814400	–615121920	–15256
13	8	1	0	–23743708692480	–588881664	–73026/5
17	3	3	0	–17037361152000	–422553600	–10480
26	3	0	0	–17034760028160	–422489088	–52392/5
19	5	1	0	–14533779456000	–360460800	–8940
12	7	2	0	–12192768000000	–302400000	–7500
17	4	1	1	–11236854988800	–278691840	–6912
11	6	3	0	–8889340723200	–220469760	–5468
24	1	2	0	–7655107461120	–189858816	–23544/5
21	2	1	1	–7101068083200	–176117760	–4368
14	9	0	0	–6402666332160	–158796288	–19692/5
14	3	4	0	–6255702835200	–155151360	–3848
21	1	3	0	–6210183168000	–154022400	–3820
12	5	2	1	–5493573550080	–136249344	–16896/5
18	2	2	1	–5111208345600	–126766080	–3144
18	1	4	0	–4382893670400	–108702720	–2696
20	4	0	1	–4137737748480	–102622464	–12726/5
15	2	3	1	–3303427276800	–81930240	–2032
27	1	1	0	–3121348608000	–77414400	–1920
14	7	0	1	–2890034380800	–71677440	–12444/7
8	12	0	0	–2292850022400	–56866320	–11283/8
24	2	0	1	–1833792307200	–45480960	–1128
7	11	1	0	–1572867072000	–39009600	–1935/2
8	9	2	0	–1401355468800	–34755840	–862
8	10	0	1	–1019315404800	–25280640	–627
10	5	4	0	–955913011200	–23708160	–588
30	1	0	0	–936404582400	–23224320	–576
15	1	5	0	–832359628800	–20643840	–512
7	9	1	1	–819354009600	–20321280	–504

Продолжение табл. 3.2.7

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
10	3	4	1	–715309056000	–17740800	–440
7	8	3	0	–704741990400	–17478720	–867/2
13	4	1	2	–575498649600	–14273280	–354
9	4	5	0	–567695278080	–14079744	–1746/5
18	3	0	2	–494213529600	–12257280	–304
19	0	3	1	–414012211200	–10268160	–764/3
7	6	3	1	–399922790400	–9918720	–246
12	6	0	2	–395858534400	–9817920	–487/2
22	0	2	1	–335544975360	–8322048	–1032/5
16	1	2	2	–292626432000	–7257600	–180
11	4	3	1	–260112384000	–6451200	–160
13	6	1	1	–253609574400	–6289920	–156
19	1	1	2	–234101145600	–5806080	–144
25	0	1	1	–234101145600	–5806080	–144
7	7	1	2	–219469824000	–5443200	–135
4	14	0	0	–188012482560	–4663008	–2313/20
8	8	0	2	–186549350400	–4626720	–459/4
8	7	2	1	–185330073600	–4596480	–114
11	2	3	2	–175575859200	–4354560	–108
6	10	2	0	–149971046400	–3719520	–369/4
3	13	1	0	–145825505280	–3616704	–897/10
6	8	2	1	–117050572800	–2903040	–72
16	0	4	1	–117050572800	–2903040	–72
22	1	0	2	–117050572800	–2903040	–72
3	11	1	1	–104857804800	–2600640	–129/2
12	1	6	0	–104044953600	–2580480	–64
4	12	0	1	–103638528000	–2570400	–255/4
10	4	2	2	–92665036800	–2298240	–57
12	10	0	0	–87787929600	–2177280	–54
6	7	4	0	–79659417600	–1975680	–49
15	3	1	2	–58525286400	–1451520	–36
28	0	0	1	–40874803200	–1013760	–176/7
13	0	5	1	–39016857600	–967680	–24
5	9	3	0	–36578304000	–907200	–45/2
3	9	1	2	–34139750400	–846720	–21

Продолжение табл. 3.2.7

f	s	t	$(4n-f-2s-3t)/4$	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
8	5	2	2	–29262643200	–725760	–18
11	3	1	3	–29262643200	–725760	–18
7	4	3	2	–27636940800	–685440	–17
4	10	0	2	–26824089600	–665280	–33/2
8	1	6	1	–26011238400	–645120	–16
6	5	4	1	–21134131200	–524160	–13
5	7	3	1	–19508428800	–483840	–12
7	5	1	3	–19508428800	–483840	–12
9	2	5	1	–19508428800	–483840	–12
6	3	4	2	–17882726400	–443520	–11
11	0	7	0	–17340825600	–430080	–32/3
8	6	0	3	–16257024000	–403200	–10
9	0	5	2	–16257024000	–403200	–10
8	3	6	0	–15606743040	–387072	–48/5
5	5	3	2	–14631321600	–362880	–9
14	3	0	3	–13005619200	–322560	–8
6	4	2	3	–9754214400	–241920	–6
7	2	3	3	–9754214400	–241920	–6
2	12	2	0	–8738150400	–216720	–43/8
3	7	1	3	–8128512000	–201600	–5
6	6	2	2	–7315660800	–181440	–9/2
2	10	2	1	–6827950080	–169344	–21/5
12	1	2	3	–6502809600	–161280	–4
16	2	0	3	–6502809600	–161280	–4
5	4	5	1	–4551966720	–112896	–14/5
17	0	1	3	–4335206400	–107520	–8/3
9	1	3	3	–3251404800	–80640	–2
2	8	2	2	–3048192000	–75600	–15/8
5	6	5	0	–3034644480	–75264	–28/15
4	8	0	3	–2438553600	–60480	–3/2
7	3	1	4	–2438553600	–60480	–3/2
10	5	0	3	–2275983360	–56448	–7/5
8	4	0	4	–1422489600	–35280	–7/8
20	0	0	3	–1300561920	–32256	–4/5
8	0	8	0	–1156055040	–28672	–32/45

Продолжение табл. 3.2.7

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
3	5	1	4	–812851200	–20160	–1/2
5	1	3	4	–812851200	–20160	–1/2
12	2	0	4	–812851200	–20160	–1/2
2	6	2	3	–541900800	–13440	–1/3
5	0	5	3	–505774080	–12544	–14/45
4	6	0	4	–406425600	–10080	–1/4
7	0	3	4	–270950400	–6720	–1/6
2	4	2	4	–203212800	–5040	–1/8
3	3	1	5	–162570240	–4032	–1/10
6	3	0	5	–27095040	–672	–1/60
2	0	2	6	–4515840	–112	–1/360
0	0	0	8	40320	1	1/40320
0	4	0	6	3386880	84	1/480
0	6	0	5	13547520	336	1/120
3	0	3	5	18063360	448	1/90
4	0	4	4	67737600	1680	1/24
16	0	0	4	67737600	1680	1/24
4	1	2	5	81285120	2016	1/20
4	4	0	5	81285120	2016	1/20
0	8	0	4	127008000	3150	5/64
7	0	7	1	495452160	12288	96/315
3	4	3	3	541900800	13440	1/3
0	10	0	3	568995840	14112	7/20
6	0	6	2	722534400	17920	4/9
5	4	1	4	812851200	20160	1/2
9	2	1	4	812851200	20160	1/2
3	6	3	2	1083801600	26880	2/3
4	3	2	4	1219276800	30240	3/4
4	4	4	2	1219276800	30240	3/4
6	2	2	4	1219276800	30240	3/4
6	5	0	4	1219276800	30240	3/4
4	6	4	1	1625702400	40320	1
6	1	4	3	1625702400	40320	1
10	3	0	4	1625702400	40320	1
6	4	6	0	2167603200	53760	4/3

Продолжение табл. 3.2.7

f	s	t	(4n−f−2s−3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
0	12	0	2	2184537600	54180	43/32
4	8	4	0	3048192000	75600	15/8
8	0	4	3	3522355200	87360	13/6
3	8	3	1	4064256000	100800	5/2
3	10	3	0	4551966720	112896	14/5
12	0	4	2	4877107200	120960	3
0	14	0	1	5208053760	129168	897/280
0	16	0	0	6195450240	153657	2439/640
7	1	5	2	6502809600	161280	4
18	1	0	3	6502809600	161280	4
4	5	2	3	7315660800	181440	9/2
8	3	2	3	7586611200	188160	14/3
6	7	0	3	10567065600	262080	13/2
15	0	3	2	13005619200	322560	8
15	1	1	3	13005619200	322560	8
10	2	2	3	14631321600	362880	9
24	0	0	2	14631321600	362880	9
5	6	1	3	16257024000	403200	10
10	1	4	2	19508428800	483840	12
13	1	3	2	19508428800	483840	12
9	1	7	0	20808990720	516096	64/5
8	2	4	2	21946982400	544320	27/2
12	4	0	3	25198387200	624960	31/2
9	4	1	3	26011238400	645120	16
10	0	6	1	30346444800	752640	56/3
7	3	5	1	39016857600	967680	24
10	2	6	0	39016857600	967680	24
21	0	1	2	39016857600	967680	24
4	7	2	2	41455411200	1028160	51/2
7	5	5	0	58525286400	1451520	36
11	7	1	1	68279500800	1693440	42
18	0	2	2	69905203200	1733760	43
32	0	0	0	73156608000	1814400	45
14	0	6	0	78033715200	1935360	48

Продолжение табл. 3.2.7

f	s	t	(4n–f–2s–3t)/4	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
5	8	1	2	102419251200	2540160	63
6	9	0	2	106483507200	2640960	131/2
4	9	2	1	120708403200	2993760	297/4
9	6	1	2	121927680000	3024000	75
9	3	3	2	144145612800	3575040	266/3
16	4	0	2	167040921600	4142880	411/4
4	11	2	0	177770557440	4408992	2187/20
12	8	0	1	192645734400	4777920	237/2
14	1	4	1	234101145600	5806080	144
10	7	0	2	258486681600	6410880	159
17	0	5	0	260112384000	6451200	160
29	0	1	0	286123622400	7096320	176
14	5	0	2	312134860800	7741440	192
12	2	4	1	328391884800	8144640	202
8	4	4	1	335707545600	8326080	413/2
9	10	1	0	338958950400	8406720	417/2
14	2	2	2	341397504000	8467200	210
13	2	5	0	351151718400	8709120	216
20	2	0	2	360905932800	8951040	222
5	10	1	1	419431219200	10402560	258
11	5	1	2	419431219200	10402560	258
17	2	1	2	429185433600	10644480	264
26	1	0	1	429185433600	10644480	264
6	11	0	1	466983014400	11581920	1149/4
9	8	1	1	468202291200	11612160	288
18	5	0	1	487710720000	12096000	300
9	5	3	1	536481792000	13305600	330
15	4	3	0	572247244800	14192640	352
11	3	5	0	721378344960	17891328	6656/15
5	12	1	0	729127526400	18083520	897/2
20	0	4	0	812309299200	20146560	1499/3
26	0	2	0	838862438400	20805120	516
8	6	4	0	846178099200	20986560	1041/2
23	0	3	0	867474800640	21514752	2668/5

Окончание табл. 3.2.7

f	s	t	$(4n-f-2s-3t)/4$	ζ_{fst}	$\zeta_{fst}/n!$	$\zeta_{fst}/n!^2$
6	13	0	0	950304337920	23569056	11691/20
10	9	0	1	1179284520960	29248128	3627/5
12	4	4	0	1705361817600	42295680	1049
13	3	3	1	1781769830400	44190720	1096
17	1	3	1	2028876595200	50319360	1248
23	1	1	1	2028876595200	50319360	1248
20	1	2	1	2233715097600	55399680	1374
10	6	2	1	2345888563200	58181760	1443
10	11	0	0	2805312061440	69576192	8628/5
9	7	3	0	2903504486400	72011520	1786
14	4	2	1	2984789606400	74027520	1836
16	6	0	1	3288795955200	81567360	2023
16	3	2	1	3589550899200	89026560	2208
22	3	0	1	3976468070400	98622720	2446
15	5	1	1	4213820620800	104509440	2592
28	2	0	0	5267275776000	130636800	3240
10	8	2	0	6569463398400	162933120	4041
11	9	1	0	7188856012800	178295040	4422
16	2	4	0	8330099097600	206599680	5124
13	5	3	0	12252593848320	303883776	37684/5
19	3	1	1	12543919718400	311109120	7716
25	2	1	0	14065577164800	348848640	8652
16	8	0	0	15837064427520	392784336	389667/40
19	2	3	0	16257024000000	403200000	10000
14	6	2	0	19234660515840	477050112	59158/5
22	2	2	0	28784686694400	713905920	17706
24	4	0	0	34892775751680	865396224	107316/5
15	7	1	0	38138978304000	945907200	23460
21	4	1	0	40245888614400	998161920	24756
20	6	0	0	43788619284480	1086027264	134676/5
18	4	2	0	63007347916800	1562682240	38757

Дополнение 4. Распределения квадратов модулей определителей матриц из целых комплексных чисел, полученных с помощью вероятностных методов, элементы которых расположены в прямоугольнике $\{0; i; ...mi-2i; mi-i\} \times \{0; 1; ...2m-3; 2m-2\}$

Таблица 4.1

Порядок 7, количество квадратов модулей определителей 1 000 000 000

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
2	2,89033E+04	5,53744E+04	6,71923E+00	9,69660E+01	7049458	1	455990
3	6,82657E+07	1,41366E+08	7,98947E+00	1,51292E+02	22580637602	1	575
4	8,86454E+09	1,88231E+10	8,46941E+00	1,73237E+02	3266025007012	1	38
5	3,17545E+11	6,82851E+11	8,68911E+00	1,83811E+02	131606232321205	1	15
6	5,42212E+12	1,17508E+13	8,83240E+00	1,91367E+02	2119694021532905	1	9
7	5,70948E+13	1,24369E+14	8,92082E+00	2,02837E+02	34600911785124625	1	9
8	4,26972E+14	9,33749E+14	9,02140E+00	2,01297E+02	150782736093127700	1	8
9	2,47605E+15	5,42913E+15	9,05636E+00	2,06203E+02	1463763000449357139.625	1	4
10	1,17910E+16	2,59152E+16	9,07901E+00	2,03190E+02	4764445963944399137	1	3
11	4,79789E+16	1,05652E+17	9,12544E+00	2,06134E+02	2156554086214110847 0	1	5
12	1,71721E+17	3,78729E+17	9,15311E+00	2,06826E+02	6870061692788426877 6	1	4
13	5,52367E+17	1,21994E+18	9,23687E+00	2,20001E+02	3418755456622546634 24	1	2
14	1,62344E+18	3,58775E+18	9,19199E+00	2,11364E+02	7442439035655513635 20	1	3
15	4,41689E+18	9,77406E+18	9,22797E+00	2,14079E+02	2150270495327227808384	1	0
16	1,12410E+19	2,49004E+19	9,26377E+00	2,16155E+02	4535406290046052610048	1	0
17	2,69781E+19	5,97779E+19	9,24753E+00	2,14720E+02	1118625005525232696729 6	1	1
18	6,14911E+19	1,36365E+20	9,28694E+00	2,17464E+02	3136353442169089471692 8	1	0
19	1,33862E+20	2,97033E+20	9,30315E+00	2,18361E+02	6245644022000034308096 0	1	0
20	2,79725E+20	6,21204E+20	9,35486E+00	2,27571E+02	1484827656563074357739 52	1	2
21	5,63415E+20	1,25145E+21	9,33577E+00	2,21732E+02	2850659883713446783877 12	1	1

Продолжение табл. 4.1

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
22	1,09745E+21	2,43817E+21	9,29064E+00	2,15665E+02	457164698583704531369984	1	0
23	2,07378E+21	4,60969E+21	9,33405E+00	2,21605E+02	104724045408652 8650575872	1	2
24	3,81191E+21	8,47583E+21	9,34110E+00	2,25875E+02	243216994300297 8320908288	1	0
25	6,83060E+21	1,51951E+22	9,32304E+00	2,16335E+02	283309070564712 4527185920	1	1
26	1,19580E+22	2,66067E+22	9,34435E+00	2,22338E+02	622675548702696 1086676992	1	2
27	2,04870E+22	4,55981E+22	9,33202E+00	2,17862E+02	881704449972758 2876925952	1	0
28	3,44070E+22	7,65938E+22	9,34134E+00	2,19084E+02	138185144818111 92597708800	1	0
29	5,67281E+22	1,26284E+23	9,33573E+00	2,19780E+02	258271188790881 58456152064	1	0
30	9,19148E+22	2,04660E+23	9,36195E+00	2,27333E+02	558753242337160 02881273856	1	1
31	1,46576E+23	3,26509E+23	9,34280E+00	2,21395E+02	834942973499153 95315728384	1	1
32	2,30227E+23	5,12867E+23	9,34159E+00	2,17610E+02	999159646553865 45658789888	1	0
33	3,56587E+23	7,94573E+23	9,33589E+00	2,17553E+02	145748805617183 658751295488	1	0
34	5,44881E+23	1,21414E+24	9,35932E+00	2,22749E+02	254609256323967 826452807680	1	0
35	8,22515E+23	1,83337E+24	9,35345E+00	2,17439E+02	301432948514510 244566532096	1	0
36	1,22697E+24	2,73470E+24	9,32684E+00	2,15959E+02	555901310000861 621186985984	1	0
37	1,81023E+24	4,03721E+24	9,36720E+00	2,19531E+02	841815604462550 134466543616	1	0
38	2,64288E+24	5,89347E+24	9,36485E+00	2,21067E+02	120477068871001 9685906644992	1	0
39	3,81933E+24	8,51927E+24	9,37035E+00	2,19231E+02	165651003746046 6535170572288	1	0
40	5,46847E+24	1,21978E+25	9,36163E+00	2,20971E+02	283795029833868 4372651081728	1	1
41	7,76019E+24	1,73063E+25	9,35451E+00	2,19506E+02	366945398558931 2312529911808	1	0
42	1,09169E+25	2,43493E+25	9,35073E+00	2,18487E+02	542116237645542 3043978657792	1	0
43	1,52339E+25	3,39777E+25	9,35378E+00	2,19453E+02	672679197237261 1095890755584	1	0
44	2,10963E+25	4,70753E+25	9,37479E+00	2,19017E+02	854245911825846 4848621862912	1	0

Окончание табл. 4.1

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
45	2,90003E+25	6,46972E+25	9,33332E+00	2,13684E+02	107043152137453 39693078151168	1	0
46	3,95786E+25	8,83284E+25	9,34147E+00	2,15073E+02	150521045999800 29530318307328	1	0
47	5,36583E+25	1,19765E+26	9,36771E+00	2,18630E+02	236874288154347 02882766585856	1	0
48	7,22596E+25	1,61197E+26	9,33852E+00	2,17566E+02	337010119519476 62199321788416	1	0
49	9,67390E+25	2,15950E+26	9,35048E+00	2,15826E+02	400172993057381 66715996438528	1	0
50	1,28716E+26	2,87429E+26	9,38648E+00	2,19851E+02	592757127354021 98719818366976	1	0
51	1,70305E+26	3,80232E+26	9,38772E+00	2,21149E+02	747407395088200 05621807972352	1	0
52	2,24085E+26	5,00234E+26	9,37406E+00	2,19964E+02	103723638719377 999509086797824	1	0
53	2,93348E+26	6,55252E+26	9,41715E+00	2,28777E+02	206692626092509 206905521963008	1	0
54	3,81996E+26	8,53245E+26	9,38110E+00	2,18713E+02	157047021768525 599756997623808	1	0
55	4,94941E+26	1,10505E+27	9,36145E+00	2,18055E+02	219054897721680 190801295966208	1	0
56	6,38457E+26	1,42574E+27	9,35443E+00	2,16282E+02	244175491848546 609584331030528	1	0
57	8,19615E+26	1,82998E+27	9,37337E+00	2,20624E+02	387896446903817 924039095091200	1	0
58	1,04799E+27	2,34144E+27	9,42504E+00	2,25685E+02	545024683887487 410159075983360	1	0
59	1,33381E+27	2,97963E+27	9,40532E+00	2,21869E+02	526950788343875 672094132928512	1	0
60	1,69132E+27	3,77867E+27	9,38874E+00	2,19883E+02	704681102996074 035696023633920	1	0
61	2,13533E+27	4,76915E+27	9,36612E+00	2,17523E+02	983502350863725 263226247577600	1	0
62	2,68624E+27	5,99946E+27	9,33772E+00	2,14031E+02	105715580831194 202204296498380 8	1	0

Таблица 4.2

Порядок 8, количество квадратов модулей определителей 1 000 000 000

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
2	2,39366E+05	4,88552E+05	7,74977E+00	1,39041E+02	72139457	1	86997
3	1,64976E+09	3,64365E+09	9,26953E+00	2,20754E+02	1010769844617	1	92
4	4,22163E+11	9,56271E+11	9,77945E+00	2,47425E+02	24664525894512	1	24
5	2,49748E+13	5,73197E+13	1,00603E+01	2,64568E+02	15327345230449850	1	14
6	6,35980E+14	1,47145E+15	1,02714E+01	2,85030E+02	45197771866983 7594.125	1	8
7	9,33177E+15	2,17039E+16	1,03361E+01	2,82184E+02	63330014238344 80782.5	1	6
8	9,27459E+16	2,16522E+17	1,04596E+01	2,94367E+02	64059051030787 487436	1	6
9	6,89764E+17	1,61459E+18	1,04569E+01	2,87381E+02	34168937432842 2726656	1	2
10	4,09746E+18	9,61637E+18	1,06033E+01	3,10392E+02	25570521733385 10174976	1	3
11	2,03410E+19	4,78196E+19	1,05773E+01	2,99217E+02	13312221866494 422624256	1	3
12	8,72341E+19	2,05368E+20	1,06171E+01	2,99997E+02	47732784075244 429516800	1	6
13	3,31230E+20	7,80744E+20	1,06676E+01	3,12621E+02	23767943844405 8008322048	1	2
14	1,13461E+21	2,67743E+21	1,06874E+01	3,07170E+02	64797532960663 3380511744	1	1
15	3,55880E+21	8,41070E+21	1,07858E+01	3,17918E+02	18579015600425 48274266112	1	2
16	1,03413E+22	2,44447E+22	1,07242E+01	3,11640E+02	62383902811407 97229236224	1	1
17	2,81094E+22	6,65276E+22	1,07650E+01	3,13338E+02	15369822127941 054653005824	1	1
18	7,20379E+22	1,70592E+23	1,07664E+01	3,11288E+02	40098035756259 730771673088	1	0
19	1,75189E+23	4,15025E+23	1,07287E+01	3,03508E+02	98319515923844 500297875456	1	2
20	4,06506E+23	9,63449E+23	1,08123E+01	3,16373E+02	24176754066388 0393814966272	1	1
21	9,04666E+23	2,14621E+24	1,08160E+01	3,15059E+02	49397190772683 2116860715008	1	1
22	1,93737E+24	4,59687E+24	1,08271E+01	3,20394E+02	12890764809345 58005502935040	1	0
23	4,00750E+24	9,51063E+24	1,08254E+01	3,13933E+02	19765608097134 93083890384896	1	0
24	8,03505E+24	1,90760E+25	1,08283E+01	3,21762E+02	49173421152139 81364428734464	1	1

Продолжение табл. 4.2

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
25	1,56440E+25	3,71412E+25	1,08025E+01	3,14315E+02	886583006650558 1778031345664	1	1
26	2,96615E+25	7,04489E+25	1,08165E+01	3,16076E+02	176560227671287 75127753293824	1	1
27	5,48683E+25	1,30335E+26	1,08923E+01	3,65666E+02	644004350017466 55705481347072	1	0
28	9,92087E+25	2,35869E+26	1,09103E+01	3,32615E+02	686848950885424 08019678330880	1	0
29	1,75639E+26	4,17396E+26	1,08113E+01	3,12398E+02	938389384010751 55741989404672	1	0
30	3,04893E+26	7,25321E+26	1,10012E+01	3,61024E+02	311417685176766 186994658181120	1	1
31	5,19550E+26	1,23543E+27	1,08450E+01	3,20064E+02	368040957673358 895288623824896	1	0
32	8,70349E+26	2,06994E+27	1,08108E+01	3,10955E+02	422051279242141 053119597903872	1	0
33	1,43462E+27	3,41390E+27	1,08857E+01	3,22094E+02	856379465231808 212332019974144	1	0
34	2,32935E+27	5,54559E+27	1,09754E+01	3,47400E+02	216063878019967 832635493633228 8	1	0
35	3,72791E+27	8,87074E+27	1,08364E+01	3,13311E+02	211023420907641 741314062758707 2	1	1
36	5,88680E+27	1,40145E+28	1,09093E+01	3,22820E+02	327241231690957 680539538450022 4	1	0
37	9,18075E+27	2,18583E+28	1,08867E+01	3,25739E+02	700920040951966 375588217539788 8	1	0
38	1,41440E+28	3,36686E+28	1,08676E+01	3,19902E+02	865669244004813 804807550245273 6	1	1
39	2,15469E+28	5,13177E+28	1,08930E+01	3,22223E+02	132630354448427 532907780893573 12	1	0
40	3,24688E+28	7,73363E+28	1,09183E+01	3,26141E+02	181754208477676 025368846228520 96	1	0
41	4,84234E+28	1,15339E+29	1,09245E+01	3,26456E+02	312909071392945 173432758383411 20	1	0
42	7,15370E+28	1,70448E+29	1,09362E+01	3,28233E+02	410571125446152 568348070935265 28	1	0

Продолжение табл. 4.2

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
43	1,04681E+29	2,49292E+29	1,08267E+01	3,11771E+02	6745948237889913673968383321 7024	1	0
44	1,51844E+29	3,61771E+29	1,09443E+01	3,28619E+02	8808272070559283878913286917 3248	1	0
45	2,18401E+29	5,20448E+29	1,09109E+01	3,19140E+02	1047278365148834089819473077 86240	1	0
46	3,11633E+29	7,42376E+29	1,08666E+01	3,16884E+02	1572701120300934603464820790 39488	1	0
47	4,41206E+29	1,05126E+30	1,09220E+01	3,29900E+02	3067862757442576549200517461 44256	1	0
48	6,20071E+29	1,47808E+30	1,09255E+01	3,23777E+02	4219874993692363716436457538 19136	1	0
49	8,65250E+29	2,06319E+30	1,09259E+01	3,22431E+02	4745029132540591036571497990 71744	1	1
50	1,19921E+30	2,86007E+30	1,09667E+01	3,28306E+02	6733877528284575747745147393 14688	1	0
51	1,65114E+30	3,93598E+30	1,09333E+01	3,35394E+02	1218960107032041499200550864 945152	1	0
52	2,25945E+30	5,38614E+30	1,08495E+01	3,09162E+02	1132256609612355422900551724 040192	1	0
53	3,07324E+30	7,33096E+30	1,09548E+01	3,27695E+02	2186541950052282448500792280 219648	1	1
54	4,15571E+30	9,91026E+30	1,09104E+01	3,18722E+02	2179294738427622408458234486 587392	1	0
55	5,58861E+30	1,33325E+31	1,09613E+01	3,27005E+02	3548433989633163191132223195 578368	1	0
56	7,47464E+30	1,78288E+31	1,09346E+01	3,22163E+02	3869289426055088811887368402 370560	1	0
57	9,94604E+30	2,37304E+31	1,09831E+01	3,42845E+02	9110861163993602828973340910 157824	1	0

Продолжение табл. 4.2

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
58	1,31657E+31	3,13943E+31	1,08908E+01	3,19530E+02	10004467340164341293841378827042816	1	0
59	1,73447E+31	4,13603E+31	1,08983E+01	3,20044E+02	90930266584513102289056140917473328	1	1
60	2,27502E+31	5,42828E+31	1,09436E+01	3,22354E+02	11289765170228929517754686164172800	1	0
61	2,96983E+31	7,08564E+31	1,09510E+01	3,28731E+02	19560464130179598824728012821364736	1	0
62	3,85997E+31	9,21034E+31	1,09961E+01	3,41237E+02	31111576939585514755389437253779456	1	0
63	4,99646E+31	1,19221E+32	1,09898E+01	3,36320E+02	32611293155434790933238227805405184	1	0
64	6,43963E+31	1,53651E+32	1,09578E+01	3,29213E+02	43417284346849451487446814483808256	1	0
65	8,27024E+31	1,97408E+32	1,10466E+01	3,61245E+02	82314264974234902676809546796630016	1	0
66	1,05761E+32	2,52418E+32	1,09384E+01	3,21856E+02	60357627897673064723177487493427840	1	0
67	1,34757E+32	3,21575E+32	1,09778E+01	3,32277E+02	93861006623525611272638452732002304	1	0
68	1,71085E+32	4,08185E+32	1,09069E+01	3,20718E+02	96371335154184004275346402738962432	1	0
69	2,16482E+32	5,16715E+32	1,09448E+01	3,26463E+02	14810185626797632131901632562803507 2	1	0
70	2,72897E+32	6,51050E+32	1,08923E+01	3,15802E+02	13797115380262473228126309278810112 0	1	0
71	3,43033E+32	8,18792E+32	1,09296E+01	3,18988E+02	18335133376504236165200219525139660 8	1	0
72	4,29717E+32	1,02603E+33	1,10399E+01	3,47036E+02	34589818533178664621097614977479475 2	1	0

Окончание табл. 4.2

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
73	5,36552E+32	1,28056E+33	1,09462E+01	3,26589E+02	38131646915218 93311215124398 58855936	1	0
74	6,68158E+32	1,59529E+33	1,09780E+01	3,31237E+02	41668183423952 61458110822631 82442496	1	1
75	8,29293E+32	1,97931E+33	1,09227E+01	3,20079E+02	43874127044375 85304376744363 55162112	1	0
76	1,02646E+33	2,45122E+33	1,10358E+01	3,44625E+02	87383586906916 53469390155830 24283648	1	1
77	1,26685E+33	3,02470E+33	1,10526E+01	3,52127E+02	86527327205917 35622287465918 92668416	1	0
78	1,55928E+33	3,72351E+33	1,10258E+01	3,38279E+02	10256789367399 97743014050528 709574656	1	1
79	1,91379E+33	4,56776E+33	1,09164E+01	3,22829E+02	13070808336129 12334778345572 838408192	1	0
80	2,34344E+33	5,59380E+33	1,09477E+01	3,24366E+02	12985925751929 74864077890950 734544896	1	0
81	2,86245E+33	6,83532E+33	1,09446E+01	3,19914E+02	15003254419917 50136335563336 825438208	1	0
82	3,48762E+33	8,32665E+33	1,09431E+01	3,24432E+02	22708634418266 42659910424562 629607424	1	0
83	4,23891E+33	1,01179E+34	1,08673E+01	3,11298E+02	23097551201885 92496129975731 076726784	1	0
84	5,13884E+33	1,22647E+34	1,08905E+01	3,18272E+02	28532349136670 80728417652086 082109440	1	0
85	6,21766E+33	1,48448E+34	1,09631E+01	3,30813E+02	43801185979462 07576490271757 574340608	1	0
86	7,50541E+33	1,79257E+34	1,09392E+01	3,23483E+02	51392883354655 23673845957495 128850432	1	0
87	9,04043E+33	2,15883E+34	1,09268E+01	3,17356E+02	44233313084363 23521813768434 396168192	1	0

Таблица 4.3

Порядок 9, количество квадратов модулей определителей 1 000 000 000

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
2	2,20095E+06	4,74941E+06	8,74679E+00	1,88494E+02	1083838025	1	15651
3	4,42275E+10	1,03384E+11	1,05355E+01	3,04229E+02	29551458981533	1	41
4	2,23026E+13	5,35047E+13	1,11356E+01	3,37145E+02	13202530068719861	1	27
5	2,17896E+15	5,29787E+15	1,16185E+01	4,10855E+02	2230431006262000679.25	1	10
6	8,27093E+16	2,02563E+17	1,16467E+01	3,81529E+02	58916865296387233792	1	9
7	1,69182E+18	4,16907E+18	1,19275E+01	4,15242E+02	1102197252852973432320	1	9
8	2,23454E+19	5,52694E+19	1,19686E+01	4,09273E+02	1734225994643053823692 8	1	11
9	2,13073E+20	5,28609E+20	1,21151E+01	4,35988E+02	1488907066691659615600 64	1	7
10	1,57857E+21	3,92509E+21	1,21806E+01	4,46927E+02	1403204773990098569527 296	1	3
11	9,56396E+21	2,38224E+22	1,22969E+01	5,03907E+02	1212158423364209142031 9744	1	3
12	4,91493E+22	1,22612E+23	1,21076E+01	4,11703E+02	3548321253237005005671 6288	1	3
13	2,20289E+23	5,50143E+23	1,21942E+01	4,23805E+02	1422701897824421403259 04384	1	0
14	8,79414E+23	2,19963E+24	1,23845E+01	5,04551E+02	1001426833019869059883 204608	1	1
15	3,17969E+24	7,96060E+24	1,22187E+01	4,17594E+02	1673525505171378618614 415360	1	3
16	1,05510E+25	2,64443E+25	1,23068E+01	4,33558E+02	6819260273615896609453 768704	1	0
17	3,24760E+25	8,14077E+25	1,22788E+01	4,32252E+02	2568810199450110910680 1115136	1	2
18	9,35591E+25	2,34561E+26	1,22680E+01	4,30656E+02	7502044732192700158986 6823680	1	1

Продолжение табл. 4.3

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
19	2,54234E+26	6,38427E+26	1,24225E+01	4,63206E+02	223615412723262921010453676032	1	2
20	6,55062E+26	1,64446E+27	1,23475E+01	4,46491E+02	478822994250061725311357157376	1	1
21	1,61031E+27	4,04452E+27	1,23239E+01	4,38494E+02	123937365779843203258755 5799040	1	1
22	3,79268E+27	9,52737E+27	1,23113E+01	4,34832E+02	277985601567907407702824 2161664	1	2
23	8,58865E+27	2,15909E+28	1,23571E+01	4,56456E+02	918499136807100561668036 9913856	1	0
24	1,87777E+28	4,72244E+28	1,24497E+01	4,65422E+02	151593232301719670763850 47969792	1	0
25	3,97324E+28	1,00029E+29	1,25128E+01	4,81954E+02	394293168614428441272372 44977152	1	2
26	8,15725E+28	2,05310E+29	1,24121E+01	4,42877E+02	510172400070244708925268 83045376	1	0
27	1,62925E+29	4,10158E+29	1,25369E+01	4,90676E+02	172151473700248359400160 865812480	1	1
28	3,17270E+29	7,99118E+29	1,23737E+01	4,34157E+02	229111131094996007076266 871095296	1	0
29	6,02991E+29	1,51847E+30	1,23466E+01	4,27611E+02	349734733119380905780945 790959616	1	0
30	1,12129E+30	2,82465E+30	1,25654E+01	5,16095E+02	125652026292306001404876 5341073408	1	1
31	2,04219E+30	1,23543E+27	1,24969E+01	4,61174E+02	147617243017223660452773 9978907648	1	0
32	3,64801E+30	9,19484E+30	1,25356E+01	4,69735E+02	269960892107952914796617 3562798080	1	1
33	6,40007E+30	1,61369E+31	1,25241E+01	4,61749E+02	532438062921207018644317 2726439936	1	2

Продолжение табл. 4.3

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
34	1,10420E+31	2,78476E+31	1,24994E+01	4,64051E+02	786660136390962274593977 2469936128	1	1
35	1,87379E+31	4,72709E+31	1,24465E+01	4,44374E+02	125385530715243203298383 00330196992	1	0
36	3,13235E+31	7,90129E+31	1,24677E+01	4,55423E+02	250481766002098669097612 18835120128	1	0
37	5,16330E+31	1,30218E+32	1,24454E+01	4,55627E+02	459744806820159635322585 54631159808	1	0
38	8,39609E+31	2,11853E+32	1,24721E+01	4,47755E+02	586765427460311272087902 94462988288	1	0
39	1,34784E+32	3,40093E+32	1,24419E+01	4,41659E+02	872272356156779558660871 18753234944	1	0
40	2,13757E+32	5,39200E+32	1,24699E+01	4,65682E+02	231708267727852605243487 585705132032	1	0
41	3,35184E+32	8,45832E+32	1,25972E+01	4,92126E+02	323466197361457055581225 140413792256	1	0
42	5,19822E+32	1,31227E+33	1,25308E+01	4,62689E+02	349323408364847424005179 403118051328	1	0
43	7,97733E+32	2,01411E+33	1,25533E+01	4,69656E+02	569432485241715234831464 463071182848	1	0
44	1,21194E+33	3,06091E+33	1,25673E+01	4,61104E+02	791766804197453525360905 310565302272	1	0
45	1,82418E+33	4,60403E+33	1,24863E+01	4,58091E+02	141042292207808229037364 716940086476 8	1	0
46	2,72124E+33	6,86920E+33	1,24093E+01	4,41289E+02	220251415772759195608336 582611828736 0	1	0
47	4,02281E+33	1,01560E+34	1,24974E+01	4,64169E+02	299432395031311189431307 686665571532 8	1	0

Продолжение табл. 4.3

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
48	5,89958E+33	1,49042E+34	1,25744E+01	4,69596E+02	4032868962294 3894229581371 40238614528	1	0
49	8,58090E+33	2,16699E+34	1,25189E+01	4,61066E+02	6861746637293 0445733634795 47580776448	1	0
50	1,23861E+34	3,12752E+34	1,24742E+01	4,47620E+02	9351433070246 2904452625447 68497352704	1	1
51	1,77531E+34	4,48691E+34	1,26276E+01	5,04770E+02	2100451756011 0020020674872 126514135040	1	0
52	2,52583E+34	6,37968E+34	1,25271E+01	4,57721E+02	1655970233487 4420412132230 899794182144	1	0
53	3,57048E+34	9,02129E+34	1,24579E+01	4,38252E+02	2174549345519 9906005464449 895442153472	1	1
54	5,01263E+34	1,26592E+35	1,25267E+01	4,74840E+02	4725410377971 3609252851328 941849313280	1	0
55	6,99563E+34	1,76797E+35	1,25088E+01	4,54224E+02	5170472724370 1104192251304 868059283456	1	0
56	9,70274E+34	2,45183E+35	1,24957E+01	4,56310E+02	9231865699652 3952496356432 228802101248	1	0
57	1,33787E+35	3,37972E+35	1,24794E+01	4,54478E+02	1093697310635 6828684017333 8123967660032	1	0
58	1,83449E+35	4,63781E+35	1,26233E+01	4,79159E+02	1469162933671 9814800581820 9251448848384	1	0
59	2,50157E+35	6,32308E+35	1,25938E+01	4,87055E+02	2616990804826 3633711850450 6357660516352	1	0
60	3,39321E+35	8,57952E+35	1,26103E+01	4,69729E+02	2680698946031 9205518640089 4896681517056	1	0
61	4,58042E+35	1,15766E+36	1,24827E+01	4,49059E+02	3496818372300 8304954117200 5841368252416	1	0
62	6,15159E+35	1,55526E+36	1,25111E+01	4,45678E+02	3830171654450 2278583839186 7361613316096	1	0

Продолжение табл. 4.3

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
63	8,22132E+35	2,07791E+36	1,25995E+01	4,94565E+02	93059415046212 97835301120464 07654309888	1	0
64	1,09402E+36	2,76552E+36	1,25166E+01	4,52681E+02	74555161569709 29911009631367 71972923392	1	0
65	1,44905E+36	3,66207E+36	1,24797E+01	4,48024E+02	96644613027622 37510455282444 59935891456	1	0
66	1,91124E+36	4,83203E+36	1,26056E+01	4,81695E+02	17342577618361 55070344855990 640714973184	1	0
67	2,51053E+36	6,35111E+36	1,25600E+01	4,65289E+02	25874881179160 61858073969154 888061419520	1	0
68	3,28308E+36	8,30168E+36	1,25631E+01	4,75253E+02	33056057104116 65442591255426 098826051584	1	0
69	4,27797E+36	1,08081E+37	1,24630E+01	4,54275E+02	36906087140309 44103173622172 810504830976	1	0
70	5,55278E+36	1,40417E+37	1,25103E+01	4,47910E+02	45421390015019 12856316097650 535918731264	1	0
71	7,17897E+36	1,81533E+37	1,25743E+01	4,70415E+02	61317389441846 22756965099040 161916780544	1	0
72	9,25154E+36	2,33984E+37	1,24966E+01	4,47636E+02	67983193053112 06403479648278 355111837696	1	0
73	1,18785E+37	3,00383E+37	1,25573E+01	4,64650E+02	90118538020980 01011396699595 040429703168	1	0
74	1,51969E+37	3,84567E+37	1,27179E+01	5,12137E+02	14344351733250 06420738345744 5660162260992	1	0
75	1,93834E+37	4,90371E+37	1,25364E+01	4,55484E+02	14063769299815 61713971702689 4268812230656	1	0
76	2,46328E+37	6,22695E+37	1,24523E+01	4,44527E+02	19815116365192 03628410147199 5663325593600	1	0
77	3,12137E+37	7,89665E+37	1,26013E+01	4,67402E+02	23959316377040 42618955341225 2142286143488	1	0

Продолжение табл. 4.3

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
78	3,94268E+37	9,97528E+37	1,26028E+01	4,69392E+02	310030680975174373148002512011 74852599808	1	0
79	4,96594E+37	1,25677E+38	1,26758E+01	4,85833E+02	368654403226413681663427569463 55551207424	1	0
80	6,23652E+37	1,57780E+38	1,26013E+01	4,82456E+02	629393958531325267726486999493 73938728960	1	0
81	7,80869E+37	1,97373E+38	1,24822E+01	4,54226E+02	567551998921459498971966958452 46156668928	1	0
82	9,75123E+37	2,46435E+38	1,23775E+01	4,26424E+02	658893433918073927701353575413 87945902080	1	0
83	1,21434E+38	3,07117E+38	1,25985E+01	4,82523E+02	101313842564586077924441250703 389820452864	1	0
84	1,50842E+38	3,81366E+38	1,24597E+01	4,41582E+02	100494744500192927195565747927 571977207808	1	0
85	1,86862E+38	4,72444E+38	1,24916E+01	4,59341E+02	145843904914440164624682161092 004184850432	1	0
86	2,30940E+38	5,84147E+38	1,24685E+01	4,40522E+02	153942368154615442940144288027 106393194496	1	0
87	2,84708E+38	7,20647E+38	1,27187E+01	5,13077E+02	282028386667640677013154024179 400920006656	1	0
88	3,50101E+38	8,86049E+38	1,25870E+01	4,74634E+02	306119451808758011120934388103 235281879040	1	0
89	4,29511E+38	1,08617E+39	1,24956E+01	4,52848E+02	292315520993791412130684805130 856301592576	1	0
90	5,25761E+38	1,32981E+39	1,24483E+01	4,35823E+02	346567839012796255299464880818 764321390592	1	0
91	6,42127E+38	1,62470E+39	1,24862E+01	4,43767E+02	415440969766049997728861388608 310240870400	1	0
92	7,82484E+38	1,98029E+39	1,25777E+01	4,63624E+02	564571927282245264171133492821 133702987776	1	0

Продолжение табл. 4.3

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
93	9,51562E+38	2,40716E+39	1,25513E+01	4,65265E+02	7752291494391 5551162377099 2972864411402 240	1	0
94	1,15457E+39	2,92074E+39	1,24871E+01	4,52679E+02	1042470258860 0914885442310 9697846532846 3872	1	0
95	1,39842E+39	3,53891E+39	1,25640E+01	4,56022E+02	8926128487133 9447308115457 4843070390468 608	1	0
96	1,68965E+39	4,27300E+39	1,24611E+01	4,38399E+02	9553802368049 5808901908618 9339493256921 088	1	0
97	2,03839E+39	5,16016E+39	1,26364E+01	4,83363E+02	2001222792177 6586920201184 3444185910319 5136	1	0
98	2,45379E+39	6,20810E+39	1,24883E+01	4,39598E+02	1433399017984 0421499099698 8846431849257 3696	1	0
99	2,94862E+39	7,46457E+39	1,26369E+01	5,19280E+02	3979839607994 7026828761684 5583964845794 9184	1	0
100	3,53572E+39	8,94735E+39	1,24993E+01	4,50175E+02	2593276999996 1794249532177 9252446577976 9344	1	0
101	4,23346E+39	1,07233E+40	1,27182E+01	4,95936E+02	4183274943114 8484429920014 9043248305170 0224	1	0
102	5,05813E+39	1,27961E+40	1,25407E+01	4,59898E+02	3954040029741 0591240427022 9634595632762 0608	1	0
103	6,03487E+39	1,52652E+40	1,25027E+01	4,54293E+02	4182321563454 3494365028545 4529229084635 9552	1	0

Окончание табл. 4.3

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
104	7,18532E+39	1,81833E+40	1,26226E+01	4,80455E+02	703018081132976308804576721224 0672064012288	1	0
105	8,54341E+39	2,16274E+40	1,26112E+01	4,66559E+02	643231035220795498271076829906 3007344852992	1	0
106	1,01401E+40	2,56587E+40	1,25968E+01	4,85545E+02	853190209825030267074748845285 4671917187072	1	0
107	1,20173E+40	3,04288E+40	1,26278E+01	4,68198E+02	872057713720075650513082872124 1590824173568	1	0
108	1,42198E+40	3,60029E+40	1,26009E+01	4,75925E+02	131660608786702084103653997873 50036760756220	1	0
109	1,67947E+40	4,25058E+40	1,26146E+01	4,91163E+02	151362111517406845548625627202 48447474073600	1	0
110	1,98107E+40	5,01281E+40	1,25200E+01	4,54157E+02	142750191017183285231929101947 43134453235710	1	0
111	1,87379E+31	5,90639E+40	1,25085E+01	4,42889E+02	143556890704651934711735479119 51993020612610	1	0
112	2,74356E+40	6,94676E+40	1,26599E+01	4,98799E+02	290653063500075596740777198002 74679293280260	1	0
113	3,22224E+40	8,15635E+40	1,25047E+01	4,40682E+02	206272703937955972838678840889 35751429914620	1	0
114	3,77864E+40	9,56600E+40	1,26050E+01	4,75525E+02	308250345710737206342165929978 81644557795330	1	0
115	4,42482E+40	1,12055E+41	1,25977E+01	4,59664E+02	327243520516581879160364794352 39678302748670	1	0
116	5,17349E+40	1,30989E+41	1,26152E+01	4,76208E+02	446435976056882234157483536815 84902748766210	1	0

Таблица 4.4

Порядок 10, количество квадратов модулей определителей 1 000 000 000

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
2	2,22464E+07	5,05012E+07	9,81460E+00	2,50358E+02	11998197185	1	2695
3	1,30325E+12	3,20741E+12	1,18720E+01	4,13275E+02	1156605613383764	1	46
4	1,29463E+15	3,26887E+15	1,25044E+01	4,54933E+02	1163578838689526920	1	20
5	2,08863E+17	5,34232E+17	1,28710E+01	4,82527E+02	159268575101116570512	1	17
6	1,18197E+19	3,05001E+19	1,32961E+01	5,52250E+02	10381033505933022532608	1	16
7	3,36901E+20	8,73981E+20	1,33094E+01	5,17859E+02	238617421809066443046912	1	6
8	5,91239E+21	1,53842E+22	1,33080E+01	5,10298E+02	4289486094274667787321344	1	6
9	7,23004E+22	1,88772E+23	1,35031E+01	5,51878E+02	6517621910490588 6919819264	1	0
10	6,68311E+23	1,74877E+24	1,35645E+01	5,60149E+02	5991080198829244 40392040448	1	3
11	4,93879E+24	1,29444E+25	1,36189E+01	5,56021E+02	3605759669436370343960772608	1	3
12	3,04141E+25	7,98761E+25	1,38182E+01	5,98620E+02	2596117831541934 7520883523584	1	3
13	1,60901E+26	4,23203E+26	1,37678E+01	5,73204E+02	1380460209222055 65208240324608	1	2
14	7,48819E+26	1,97159E+27	1,37523E+01	5,74036E+02	7557905093746965 93249976451072	1	0
15	3,12062E+27	8,22432E+27	1,38934E+01	6,14094E+02	2580920170653341 264544136167424	1	2
16	1,18251E+28	3,12039E+28	1,39725E+01	6,39052E+02	1395261174344209 8040138683645952	1	0
17	4,12235E+28	1,08846E+29	1,39027E+01	5,86591E+02	3915529621427817 8493814630514688	1	0
18	1,33531E+29	3,52705E+29	1,40568E+01	6,80400E+02	1864804383330131 83488179570737152	1	1
19	4,05188E+29	1,07128E+30	1,40534E+01	6,40895E+02	3888878335940538 91145816575311872	1	2
20	1,15962E+30	3,06651E+30	1,40629E+01	6,37921E+02	1113427430121041 66100718489016729 6	1	0
21	3,14980E+30	8,33588E+30	1,40257E+01	6,10871E+02	3096491510810520 77843645077441740 8	1	2
22	8,15450E+30	2,15912E+31	1,40409E+01	6,14300E+02	7545228664512586 92056551384311398 4	1	0

Продолжение табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
23	2,02194E+31	5,35313E+31	1,40198E+01	6,16752E+02	1918999535554205 1838706752765820 928	1	0
24	4,81986E+31	1,27579E+32	1,38846E+01	5,80831E+02	4619499520948973 4744457217619001 344	1	0
25	1,10817E+32	2,93638E+32	1,41825E+01	6,76977E+02	1153168750042634 3564990803613843 4560	1	1
26	2,46435E+32	6,53185E+32	1,40776E+01	6,16960E+02	2125363252443792 8717993518425335 3984	1	0
27	5,31447E+32	1,40812E+33	1,39385E+01	5,97280E+02	5131466656395989 9071488381422456 0128	1	0
28	1,11396E+33	2,95368E+33	1,41736E+01	7,31453E+02	1849104702622387 1654345372353492 41856	1	0
29	2,27391E+33	6,03315E+33	1,42813E+01	7,39082E+02	3596633127080162 6319555930369839 59552	1	0
30	4,52939E+33	1,20144E+34	1,40776E+01	6,19529E+02	3557153865370069 0603680894128320 67584	1	0
31	8,81687E+33	2,34002E+34	1,41747E+01	6,34816E+02	8355730071647166 5110913367391611 12576	1	0
32	1,67955E+34	4,45689E+34	1,40554E+01	6,02599E+02	1478964167627919 3609690568509762 830336	1	0
33	3,13610E+34	8,32160E+34	1,40569E+01	6,32327E+02	3678569148647978 0380650131311797 731328	1	0
34	5,74619E+34	1,52585E+35	1,41759E+01	6,31307E+02	4385110783279328 1008147544912437 444608	1	0
35	1,03428E+35	2,74696E+35	1,44386E+01	8,67082E+02	1952737778527401 8909372587252439 1088128	1	0
36	1,83058E+35	4,86313E+35	1,41659E+01	6,33829E+02	1805189716284774 5353152513670911 7280256	1	0
37	3,18966E+35	8,47689E+35	1,42137E+01	6,48591E+02	3366276440343640 8370507651979923 5805184	1	0

Продолжение табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
38	5,47344E+35	1,45426E+36	1,41550E+01	6,45309E+02	5600027045600 0898367500229 5330430517248	1	0
39	9,26035E+35	2,46022E+36	1,42231E+01	6,53885E+02	9393725132679 1780758736675 7447053082624	1	1
40	1,54592E+36	4,11128E+36	1,41918E+01	6,42027E+02	1714063889966 0223155957978 2836389517721 6	1	0
41	2,54773E+36	6,77225E+36	1,41907E+01	6,40732E+02	2712013560597 8276158271844 0147575740825 6	1	0
42	4,14754E+36	1,10215E+37	1,41695E+01	6,57142E+02	4697629085234 5888542605065 7917003733401 6	1	0
43	6,67596E+36	1,77389E+37	1,40046E+01	6,14403E+02	7530921647228 6006858394341 0141552967680 0	1	0
44	1,06257E+37	2,82326E+37	1,40641E+01	6,16873E+02	1085765519172 6386690666765 4276053907537 92	1	0
45	1,67352E+37	4,44534E+37	1,38960E+01	5,66315E+02	1190289134879 7648580849542 1149410859417 60	1	1
46	2,60940E+37	6,94139E+37	1,43956E+01	7,50127E+02	3983199957516 6420269441894 0070092089589 76	1	0
47	4,02865E+37	1,07072E+38	1,43112E+01	8,11097E+02	7330396755330 8825235271816 1717471278530 56	1	0
48	6,16341E+37	1,63854E+38	1,42686E+01	6,99623E+02	8240783308826 5272453172255 4837646809497 60	1	0
49	9,34800E+37	2,48551E+38	1,40363E+01	6,01284E+02	8495830785293 6002899456812 1224919703879 68	1	0

Продолжение табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
50	1,40546E+38	3,73854E+38	1,41325E+01	6,19006E+02	138547717623531894042362012674128789635072	1	0
51	2,09635E+38	5,57374E+38	1,40406E+01	5,96141E+02	182753492272221413315642890465743724347392	1	0
52	3,10203E+38	8,25040E+38	1,40614E+01	6,12047E+02	362513519252234584524733827717737922691072	1	0
53	4,55537E+38	1,21099E+39	1,39274E+01	5,78396E+02	446621338714023321921473921679260947316736	1	0
54	6,64336E+38	1,76751E+39	1,42296E+01	6,75634E+02	708355612488879019166569449724432332357632	1	0
55	9,61948E+38	2,55850E+39	1,40148E+01	5,94108E+02	916298815199427990135646143972482909995008	1	0
56	1,38348E+39	3,68165E+39	1,41088E+01	6,15932E+02	133227290313688283716873213288 9125233623040	1	1
57	1,97661E+39	5,25965E+39	1,42582E+01	6,80831E+02	235033797435234705142236205308 7371055857664	1	0
58	2,80708E+39	7,46998E+39	1,40656E+01	5,92512E+02	199081461637569661854663129834 7912184987648	1	1
59	3,96160E+39	1,05447E+40	1,46911E+01	1,09191E+03	861691058632914393291844532334 1311705612288	1	0
60	5,56032E+39	1,48023E+40	1,41996E+01	6,44582E+02	614707526989599309084130455665 9847578255360	1	0
61	7,75675E+39	2,06396E+40	1,41247E+01	6,20620E+02	697662983477246237613374445664 4602426818560	1	0
62	1,07647E+40	2,86547E+40	1,41828E+01	6,26847E+02	990817809147383019037732952384 1858541715456	1	0
63	1,48616E+40	3,95563E+40	1,41782E+01	6,55677E+02	177112536529853398827386611279 54844664987648	1	0
64	2,04103E+40	5,43615E+40	1,42120E+01	6,38563E+02	213143962583833612047212690072 96805424070660	1	0

Продолжение табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
65	2,78904E+40	7,42332E+40	1,41815E+01	6,19575E+02	237511605953829907445145990677 92501456764930	1	0
66	3,79321E+40	1,01001E+41	1,41676E+01	6,35092E+02	384584908653942140095127465454 46311845429250	1	0
67	5,13578E+40	1,36747E+41	1,41755E+01	6,24085E+02	515051656695081305724864073270 81695490867200	1	0
68	6,92126E+40	1,84427E+41	1,42768E+01	6,42269E+02	696522439640524319288372938120 78471934902270	1	0
69	9,28508E+40	2,47105E+41	1,41286E+01	6,14095E+02	785840591119132334975245848977 70955753914370	1	0
70	1,24059E+41	3,30281E+41	1,40379E+01	5,82230E+02	924188497216965917863171550641 84992272744448	1	0
71	1,65047E+41	4,39255E+41	1,40504E+01	5,92985E+02	144413169672539253000752614275 818163468763136	1	0
72	2,18717E+41	5,82391E+41	1,41682E+01	6,23411E+02	174000923890250153768712858416 195996055764992	1	0
73	2,88760E+41	7,69085E+41	1,41546E+01	6,13753E+02	303307839789792195040931986287 137971771539456	1	0
74	3,79709E+41	1,01131E+42	1,41530E+01	6,18696E+02	372369181687713269035704616907 287316821704700	1	0
75	4,97475E+41	1,32488E+42	1,41834E+01	6,48558E+02	555248127240354707094564437237 714080860471300	1	0
76	6,49307E+41	1,72792E+42	1,40429E+01	5,95744E+02	514842922802635413440345937719 023531116724200	1	0
77	8,44873E+41	2,25112E+42	1,41520E+01	6,15151E+02	714467655160794891328519412091 279307932958700	1	0
78	1,09528E+42	2,91792E+42	1,41927E+01	6,23453E+02	101280478019584453383881287603588068943908000 0	1	0
79	1,41503E+42	3,77003E+42	1,42604E+01	6,47275E+02	139734993368114098298353427369911574097349800 0	1	0

Продолжение табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
80	1,82237E+42	4,85335E+42	1,41072E+01	6,02540E+02	16008213939322 87103002385013 34971270560953 1000	1	0
81	2,34004E+42	6,23216E+42	1,41190E+01	6,06761E+02	18339194423573 65246229484738 55545770654249 8000	1	1
82	2,99505E+42	7,97807E+42	1,41832E+01	6,17495E+02	28247675898728 53015206433671 05874002704754 3000	1	1
83	3,82202E+42	1,01804E+43	1,41977E+01	6,30048E+02	36438509318354 21512230802764 11606292315609 5000	1	0
84	4,86282E+42	1,29517E+43	1,41029E+01	6,07030E+02	40376327236163 57266161036209 09885582974386 2000	1	0
85	6,16914E+42	1,64256E+43	1,42825E+01	7,87155E+02	11141027874095 27903831422786 17378423185730 40000	1	0
86	7,80485E+42	2,07859E+43	1,40495E+01	5,95945E+02	62171318217503 65880297433566 24044776472182 7840	1	0
87	9,84904E+42	2,62487E+43	1,41585E+01	6,01722E+02	70809618732305 50812032588953 05647918510243 8400	1	0
88	1,23932E+43	3,30123E+43	1,41095E+01	6,10411E+02	11718783280121 69132397455297 14787130176889 15968	1	0
89	1,55527E+43	4,14243E+43	1,40701E+01	5,93122E+02	11800068290864 30469056916925 37746965975479 09120	1	0
90	1,94706E+43	5,18614E+43	1,40118E+01	5,82509E+02	16619067572177 14958819663910 44914044909146 60000	1	0

Продолжение табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
91	2,43057E+43	6,47317E+43	1,41492E+01	6,16999E+02	2444547227816519 6589700561450413 560983082500000	1	0
92	3,02833E+43	8,06678E+43	1,41383E+01	6,15235E+02	2641790963678681 1347029986726841 147154455590000	1	0
93	3,76401E+43	1,00392E+44	1,44238E+01	6,95704E+02	4999104246551985 1974054370282885 423770739150000	1	0
94	4,66613E+43	1,24344E+44	1,42865E+01	6,71879E+02	5880070896630750 8742611299475455 361266153950000	1	0
95	5,77139E+43	1,53809E+44	1,41693E+01	6,05771E+02	4844461761569930 0032959826366213 349417712350000	1	0
96	7,12281E+43	1,89866E+44	1,42911E+01	6,43491E+02	7054387289382827 3059589018972869 761232726392832	1	0
97	8,77315E+43	2,33745E+44	1,41730E+01	6,23641E+02	8939478458173729 7195446557858524 478153817063424	1	0
98	1,07818E+44	2,87145E+44	1,40813E+01	6,08727E+02	9671693760177670 4685489304775705 381473804615680	1	0
99	1,32213E+44	3,52291E+44	1,41962E+01	6,39649E+02	1508655612058148 6672785073401855 3926854234865664	1	0
100	1,61785E+44	4,30774E+44	1,40409E+01	5,99390E+02	1412936391363386 3798369438678520 0999089924210688	1	0
101	1,97584E+44	5,26307E+44	1,41360E+01	6,11110E+02	1509519990919795 7439481613457211 5351052098732032	1	0
102	2,40872E+44	6,42022E+44	1,42496E+01	6,49340E+02	2616440183501623 8204630152588270 5463325900144640	1	0
103	2,93062E+44	7,81182E+44	1,41676E+01	6,18274E+02	2615156800007754 2301824140547746 9341816698400000	1	0
104	3,55799E+44	9,48558E+44	1,43818E+01	6,72677E+02	3529687120871718 9344078538290349 2006652854400000	1	0
105	4,31203E+44	1,14932E+45	1,44170E+01	7,07715E+02	4841911493107743 4342046134126092 2945630254400000	1	0

Продолжение табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
106	5,21626E+44	1,39095E+45	1,43564E+01	6,56163E+02	42750667388425 25996684146267 63842457655656 300000	1	0
107	6,29998E+44	1,67864E+45	1,40752E+01	5,93133E+02	51512595005524 42672642124994 39119835057965 000000	1	0
108	7,59323E+44	2,02326E+45	1,41647E+01	6,49584E+02	10306489457803 34376641333942 33625475480738 5000000	1	0
109	9,13595E+44	2,43423E+45	1,42385E+01	6,49530E+02	94981531124088 91804315593470 14434727776137 200000	1	0
110	1,09767E+45	2,92538E+45	1,41737E+01	6,18841E+02	10058348059335 14660255192001 66795253489263 7585408	1	0
111	1,31669E+45	3,51097E+45	1,45095E+01	8,57999E+02	24959512466806 06008104134127 22420706225267 6000000	1	0
112	1,57637E+45	4,20429E+45	1,44041E+01	6,98619E+02	17292641551041 98938020174266 40388119399961 6180224	1	0
113	1,88479E+45	5,02387E+45	1,42376E+01	6,45158E+02	19390234916150 17542614069900 63467544402223 2743936	1	0
114	2,24910E+45	5,99598E+45	1,41685E+01	6,05194E+02	15700300462159 17672533360487 78162828992818 7000000	1	0
115	2,68016E+45	7,14196E+45	1,41975E+01	6,50636E+02	30422161866370 36266093785480 69385718724065 6000000	1	0
116	3,18888E+45	8,49655E+45	1,41379E+01	6,13053E+02	28454188280536 90031114330754 68449383589138 9000000	1	0

Продолжение табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
117	3,78893E+45	1,00991E+46	1,41919E+01	6,23740E+02	318454305698228466375191969933887893162859200000	1	0
118	4,49496E+45	1,19742E+46	1,40267E+01	5,81444E+02	308081353418523910615500988030103491000649800000	1	0
119	5,32515E+45	1,41906E+46	1,41572E+01	6,23971E+02	525673829335630816716459476242904467643830800000	1	0
120	6,29839E+45	1,67816E+46	1,41653E+01	6,22838E+02	623004695979159072994827879390662350843724500000	1	0
121	7,44016E+45	1,98227E+46	1,42442E+01	6,58694E+02	941852224999625178182431603374942927715721200000	1	0
122	8,77864E+45	2,34034E+46	1,41792E+01	6,17728E+02	695261631675558588747506187813571860816508400000	1	0
123	1,03427E+46	2,75840E+46	1,42658E+01	6,37674E+02	962522963152370052187397987567475580317306800000	1	0
124	1,21686E+46	3,24396E+46	1,40949E+01	5,93504E+02	102792734282137304076561824496456882811410300000	1	0
125	1,42965E+46	3,81107E+46	1,41782E+01	6,22024E+02	140979130382112758939262916503970332772765000000	1	0
126	1,67754E+46	4,46992E+46	1,40380E+01	5,79218E+02	116547420969195028596983716552284242259142697028768	1	0
127	1,96621E+46	5,24056E+46	1,41409E+01	6,21912E+02	172945926082529132683913242478382576294091198030016	1	0

Продолжение табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
128	2,30138E+46	6,13577E+46	1,42359E+01	6,33075E+02	218833499380011 721175936872985 492611370574214 59456	1	0
129	2,69039E+46	7,17399E+46	1,42602E+01	6,53757E+02	336128589645438 756369810883798 975884799627933 77792	1	0
130	3,14190E+46	8,38465E+46	1,46371E+01	8,39341E+02	527106849349938 988420629059689 176194097327100 00000	1	0
131	3,66331E+46	9,76455E+46	1,42898E+01	7,47628E+02	626489932426891 014661274138397 309482938425100 00000	1	0
132	4,26770E+46	1,13758E+47	1,41286E+01	6,18765E+02	421888584176015 211006889559365 265716573553100 00000	1	0
133	4,96583E+46	1,32407E+47	1,42390E+01	6,34914E+02	467504210640977 839950951102991 430277480676600 00000	1	0
134	5,77126E+46	1,53779E+47	1,40400E+01	5,80546E+02	487056042027202 028087419714729 767660752612300 00000	1	0
135	6,69932E+46	1,78580E+47	1,42555E+01	6,51053E+02	730424282810571 531491307166165 354776844765100 00000	1	0
136	7,76951E+46	2,07192E+47	1,43888E+01	7,01980E+02	942441820571963 899846036745164 341046934748706 89792	1	0
137	8,99986E+46	2,39903E+47	1,41834E+01	6,15781E+02	750323132803141 926189121295412 963111175690607 65696	1	0
138	1,04151E+47	2,77844E+47	1,42767E+01	6,31899E+02	100054574006747 092570226200633 905012256654168 686592	1	0

Окончание табл. 4.4

mod	Среднее	кр. Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	max	N_{max}	N_{zeroes}
139	1,20366E+47	3,21042E+47	1,42985E+01	6,49907E+02	119038699556305621540715802705666044080198902611968	1	0
140	1,39009E+47	3,70607E+47	1,41285E+01	6,18329E+02	142372258349606942975084210601348940589320307212288	1	0
141	1,60324E+47	4,27367E+47	1,42306E+01	6,29398E+02	146742577615877087794513403121058647023440002809856	1	0
142	1,84762E+47	4,92575E+47	1,41889E+01	6,29998E+02	166576862212056237922822028564451890816171498274816	1	0
143	2,12683E+47	5,66960E+47	1,40916E+01	5,89520E+02	173067597563385854590227939770744121011490166669312	1	0
144	2,44658E+47	6,52547E+47	1,41573E+01	5,98539E+02	177554241009912756911042518695585305948814900000000	1	0
145	2,81105E+47	7,49941E+47	1,41739E+01	5,97123E+02	188692662893380585884132862167013146558584400000000	1	0
146	3,22622E+47	8,60667E+47	1,42731E+01	6,44647E+02	362335356707548196514520008309203548672605000000000	1	0
147	3,69987E+47	9,85958E+47	1,41558E+01	6,23651E+02	333249012821327825006972625887265516985294700000000	1	0
148	4,23908E+47	1,13034E+48	1,42927E+01	6,54746E+02	410244027113506823964442416190627050223993000000000	1	0
149	4,85198E+47	1,29310E+48	1,41158E+01	6,08466E+02	393712432198750287236900687112028211996753700000000	1	0

Список литературы

1. *Алферов, А.П.* Основы криптографии: учебное пособие / А.П. Алферов, А.Ю. Зубов, А.С. Кузьмин, А.В. Черемушкин. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Гелиос АРВ, 2005. — 480 с., ил.

2. ***Антипин, Н.А.*** **Аспекты распределений матриц из целых чисел порядка от 2 до 6 по их определителям. — 3-е изд., доп. — Санкт-Петербург: Наукоемкие технологии, 2022. — 572 с.**

3. ***Антипин, Н.А.*** **Начальные стохастические моменты матриц. — 2-е изд., доп. — Санкт-Петербург: Наукоемкие технологии, 2025. — 597 с.**

4. ***Бахвалов, Н.С.*** **Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — Москва: Наука, 1987.**

5. *Бронштейн, И.Н.* Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. — Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957.

6. *Бугров, Я.С.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Наука, 2013. — 222 с.

7. ***Гантмахер, Ф.Р.*** **Теория Матриц. — 5-е изд. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 560 с. — ISBN 978-5-9221-0524-8.**

8. *Гурский, Д.А.* Вычисления в Mathcad 12 / Д.А. Гурский, Е.С. Турбина. — Санкт-Петербург: Питер, 2006. — 544 с.

9. *Дейтел, Х.М.* Как программировать на C++ / Х.М. Дейтел, П.Дж. Дейтел; пер. с англ. — 5-е изд. — Москва: Бином-Пресс, 2008. — 1456 с.

10. *Дьяконов, В.П.* MATLAB. Полный самоучитель. — Москва: ДМК Пресс, 2012. — 768 с.: ил.

11. *Крылов, А.Н.* Лекции о приближенных вычислениях. — 4-е изд. — Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950.

12. ***Лаврентьев, М.А.*** **Методы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для ун-тов / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — 5-е изд., испр. — Москва: Наука. Гл. ред., физ.-мат. лит., 1987. — 688 с.**

13. *Миллер, Р.* Последовательные и параллельные алгоритмы: Общий подход / Р.Миллер, Л. Боксер; пер. с англ. — Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. — 406 с.

14. *Олифер, В*. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: учебник для вузов / В. Олифер, Н. Олифер. — 5-е изд. — Санкт-Петербург: Питер, 2016. — 992 с.

15. *Орлов, С.А*. Организация ЭВМ и систем: учебник для вузов / С.А. Орлов, Б.Я. Цилькер. — 3-е изд. — Санкт-Петербург: Питер, 2015. — 688 с.

16. *Руссинович, М*. Внутреннее устройство Windows / М. Руссинович, Д. Соломон, А. Ионеску, П. Йосифович. — 7-е изд. — Санкт-Петербург: Питер, 2018. — 944 с.: ил.

17. *Таненбаум, Э*. Архитектура компьютера. — 5-е изд. — Санкт-Петербург: Питер, 2013. — 844 с.

18. *Таненбаум, Э*. Современные операционные системы / Э. Таненбаум, Х. Бос. — 4-е изд. — Санкт-Петербург: Питер, 2019. — 1120 с.

19. *Уильямс, Э*. Параллельное программирование на C++ в действии. Практика разработки многопоточных программ / пер. с англ. А.А. Слинкина. — Москва: ДМК Пресс, 2012. — 672 с.

20. ***Фихтенгольц, Г.М.*** **Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 т. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — Т. 1. — 608 с.: ил.**

21. *Хайрер, Э*. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер; пер. с англ. — Москва: Мир, 1999. — 685 с., ил. — ISBN 5-03-003117-0.

22. *Хайрер, Э*. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер; пер. с англ. — Москва: Мир, 1990. — 512 с., ил. — ISBN 5-03-001179-X.

23. *Шарый, С.П*. Оценка вариабельности решения, полученного с помощью интервальной регуляризации // Марчуковские научные чтения — 2019: Труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. — Новосибирск, 2019. — С. 550–556.

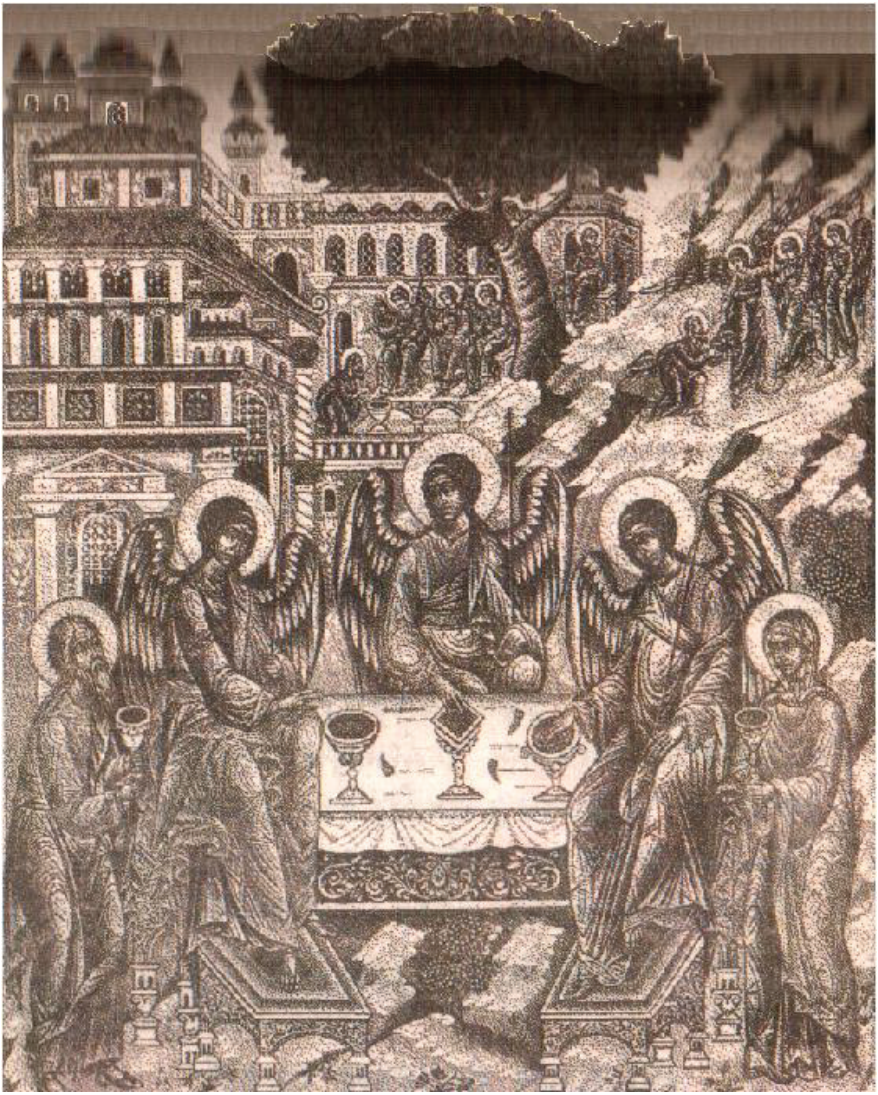
24. *Юшкевич, А.П*. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / А.П. Юшкевич, В.И. Антропова, И.Г. Башмакова [и др.]. — Т. 3: Математика XVIII столетия / под ред. А.П. Юшкевича. — Москва: Наука, 1972. — 497 с.

25. *Юшкевич, А.П*. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Юшкевич А.П., Башмакова И.Г., Майстров Л.Е.

[и др.]. Т. 2: Математика XVII столетия / под ред. А.П. Юшкевича А.П. — Москва: Наука, 1970. — 304 с.

26. *Crandall R., Pomerance C*. Prime Numbers. A computational Perspective. — M. URSS, 2011. — 664 p. — ISBN 978-5-453-00016-6.

27. *Olver, P. J*. Orthogonal Bases and the QR Algorithm. — University of Minnesota, 2010. — 30 p.



День Святой Троицы. Неизвестный автор

Учебное издание

Антипин Николай Александрович

Решение проблемы собственных значений матриц с помощью характеристического полинома

Учебное пособие

Редактор *Л. Ю. Киреева*
Верстка *К. В. Михайлов*
Главный редактор *В. М. Коровин*

Издательство «Наукоемкие технологии»
ООО «Корпорация «Интел Групп»
https://publishing.intelgr.com
E-mail: publishing@intelgr.com
Тел.: +7 (812) 945-50-63
Интернет-магазин издательства
https://shop.intelgr.com/

Подписано в печать 13.05.2026.
Формат 60×84/16
Объем 9 усл. п. л.
Тираж 500 экз.

ISBN 978-5-00271-114-7

